

# PHYSIKALISCHE *Verhandlungen*

## AUTORENREFERATE UND TAGUNGSBERICHTE

VERBAND DEUTSCHER PHYSIKALISCHER GESELLSCHAFTEN  
ÖSTERREICHISCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT  
ASTRONOMISCHE GESELLSCHAFT  
DEUTSCHE METEOROLOGISCHE GESELLSCHAFT  
DEUTSCHE GEOPHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT  
DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE OPTIK  
DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR ELEKTRONENMIKROSKOPIE  
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK  
SEKTION FÜR KRISTALLKUNDE DER DT. MINERALOG. GES.

1955

6. JAHRGANG

8



Jahrestagung der GAMM  
in Berlin

PHYSIK

PHYSIK VERLAG

MOSBACH · BADEN

# G A M M

## Ausbildung und Stellenvermittlung der DIPLOM-MATHEMATIKER

Heft 1/1954

*H. Görtler:* Ausbildung und Stellenvermittlung der Diplom-Mathematiker.

*A. Siemens:* Korreferat für die Industrie.

*H. Kracke:* Korreferat für Lebensversicherungswesen und Statistik.

*H. Blenk:* Korreferat für die angewandte Forschung.

*W. Kanngießer:* Korreferat für den Interessenverband deutscher Mathematiker (IVM).

Diskussionsbeiträge

Heft 2/1955

*F. Schultz-Grunow:* Für die vermehrte Verwendung von Mathematikern in der Industrie und ihre zweckentsprechende Ausbildung.

*A. Siemens:* Der Diplom-Mathematiker in der Industrie.

*H. Görtler:* Die praktische Tätigkeit im Rahmen der Ausbildung des Diplom-Mathematiker.

*Fr. A. Willers:* Die Ausbildung des Diplom-Mathematiker an der Technischen Hochschule Dresden.

*H.-R. Dienst:* Die Stellenvermittlung der Mathematiker.

*W. Schmeidler:* Diskussionsbeiträge über die Ausbildung der Diplom-Mathematiker.

Auf den beiden letztjährigen Tagungen der GAMM wurde über die Ausweitung und Vertiefung der Wirkungsmöglichkeiten der Mathematiker in der Praxis diskutiert. Die Ergebnisse und Folgerungen vermitteln vor allem dem mathematischen Nachwuchs eine klare Vorstellung von den gegebenen Möglichkeiten zukünftiger Tätigkeit.

Jedes Heft für 2.— DM zu beziehen durch alle Buchhandlungen und den

PHYSIK VERLAG • MOSBACH / BADEN



## Jahrestagung der GAMM in Berlin

Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik

Die GAMM hielt ihre Jahrestagung vom 31. Mai bis 4. Juni 1955 an der U Berlin-Charlottenburg ab. Die örtliche Tagungsleitung hatte Prof. Szabó inne.

Im Mittelpunkt der Tagung standen die Forschungsberichte, die auf gemeinsamen Sitzungen gegeben wurden. Die kürzeren Referate über Einzelarbeiten wurden wie bisher in entsprechenden Parallelsitzungen gehalten.

[Ein ausführlicher Allgemeinbericht über den Verlauf der Tagung erschien in PYHS. BL. 11, 417 (1955); eine ausführliche Darstellung aller Vorträge wird in Heft 9/10 des laufenden Jahrganges der Z. ANGEW. MATH. TECH. (ZAMM) wie gewohnt erscheinen.]

MITTWOCH, DER 1. JUNI 1955

Vormittags

Gemeinsame Sitzung: Forschungsberichte

Vorsitz: W. Haack (Berlin)

L. COLLATZ (Hamburg): *Approximation von Funktionen bei einer und mehreren unabhängigen Veränderlichen.*

Bei verschiedenartigen Anwendungen tritt die Aufgabe auf, eine in einem Bereich  $B$  des  $x_1, \dots, x_n$ -Raumes gegebene Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  durch eine Linearkombination  $Q_p$  aus ebenfalls in  $B$  gegebene Funktionen  $\varphi(x_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, p$ ) möglichst gut anzunähern, d. h. der Fehler  $\varepsilon = Q_p - f$  soll in  $B$  „möglichst klein“ werden. Als Maß für den Fehler  $\varepsilon$  kann man eine Norm einführen, z. B. das mittlere Fehlerquadrat, oder den Maximal-

fehler in B. Die Existenz einer „Minimallösung“, d. h. einer Annäherung  $Q$  mit kleinster Norm ist leicht ziemlich allgemein beweisbar, die Eindeutigkeit jedoch nur unter zusätzlichen Voraussetzungen. Dagegen läßt sich ein allgemeiner, für die Anwendung wichtiger Satz unter einigen weiteren in vielen praktischen Fällen erfüllten Annahmen beweisen. Dieser Satz sagt aus, wie nahe man bei den gewählten Funktionen  $u_v$  überhaupt an die Funktion  $f$  herankommen kann und wie weit man sich mit einer bestimmten Funktion  $Q_p$  bereits einer Minimallösung genähert hat. Während ein gewisse notwendiges und hinreichendes Kriterium von *Haar* im wesentlichen nur bei einer unabhängigen Veränderlichen benutzt werden kann, läßt sich der erwähnte Satz auch bei mehreren Veränderlichen, insbesondere bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen anwenden.

*F. JOHN (z. Zt. Göttingen): Sachgemäße Probleme für partielle Differentialgleichungen.*

Im Anschluß an eine dankenswerte Diskussionsbemerkung von *K. Hinkelmann* (Frankfurt) versuchte der Vortragende unter Bezugnahme auf die in *Z. ANGEW. MATH. PHYS.* 3, 21 (1952) erschienene Abhandlung von *E. Stiefel* „Über einige Methoden der Relaxationsrechnung“ folgenden Zusammenhang mit dem Gitterdeterminanten-Verfahren von *Konrad Friedrich* zu erhärten. *E. Stiefels* „Blockbild“ kann als „Punktdarstellung“ im Sinne von *K. Friedrich* gedeutet werden. Es deckt sich nämlich in diesem Falle das Netzbild mit der Punktdarstellung, wie dies auch bei anderen linearen Gleichungssystemen der Fall ist, z. B. bei der Berechnung elektrischer Leitungsnetze (*Friedrich* 1930 in der *Z. VERMESS.-WES.*). Darüber hinausgehend erkannte jedoch *Friedrich*, Ingenieur, Mathematiker und Geodät wie sein großes Vorbild *C. F. Gauß*, daß die Punktdarstellung eines linearen Gleichungssystems auch dann die Berechnung der inversen Matrix zu erleichtern vermag, wenn sich Punktdarstellung und Netzbild nicht deuten. Dieser Gedankengang wurde anhand einiger einfacher Beispiele näher erläutert.

*J. R. WESKE (College Park): Detail Phenomena in the Process of Transition to the Turbulent Flow Initiated by a Single Roughness Element. Theoretical Aspects.*

Observation of the Vortex Configurations (Sequences of „Horseshoe Vortices“) which may be generated at certain *Reynolds* Numbers in the laminar flow in a pipe or in the laminar boundary layer along a flat plate show the first beginnings of turbulent motion close to the filament axis of the vortex, in the region where maximum stretching of this filament occurs. This incipient turbulent motion then is seen to spread along the filament axis toward the apex of the horseshoe vortex and, in conjunction with interference effects between neighboring vortex filaments, to the region between the vortex filaments until ultimately the entire space (of the pipe or of the boundary layer) is filled with turbulent motion.

It is proposed to present here some theoretical considerations which are believed to be pertinent and which, it is hoped, will elucidate the mechanism of flow by which, in this case, turbulence is initiated.

It is assumed that the first appearance of the observed turbulence, i. e. random motion, is predicated upon the presence of a region of finite vorticity in the „core“ of the vortex filament and furthermore that it is related to the stretching of the vortices.



## Fachsitzung A: Angewandte Mathematik

Vorsitz: F. Willers (Dresden)

TH. PÖSCHL (TH Karlsruhe): Über eine Verbesserung der RITZschen Methode.

Bei der Anwendung der Ritzschen Methode in der gewöhnlich benützten Form stellt sich in manchen Fällen der Übelstand heraus, daß trotz richtiger Wahl der Folge der Annäherungsfunktionen die Differentialgleichung, um deren Integration es sich handelt, nur sehr unvollkommen erfüllt ist; auch entsteht eine Schwierigkeit dann, wenn es sich darum handelt, Lösungen einer Differentialgleichung, die einen oder mehrere Parameter enthalten, für eine Folge von Werten dieser Parameter zu bestimmen, da für alle die Annäherungsfunktionen dieselben bleiben, und nur die Koeffizienten, mit denen sie für die Herstellung der Lösung multipliziert werden, Änderungen erfahren.

Um daher die Form der gegebenen Differentialgleichung in eine engere Beziehung zu den Annäherungsfunktionen zu bringen, wird man trachten, diese Funktionen auch von den Parametern der Differentialgleichung oder überhaupt von ihrer besonderen Form abhängig zu machen, und dies kann dadurch geschehen, daß man die Ritzsche Methode mit der Methode der Kollokation koppelt, in der Form, daß man die gewählte Annäherungsfolge, bzw. die einzelnen Glieder derselben in die gegebene Differentialgleichung einsetzt und für jede der gewählten Kollokationsstellen mit Hilfe dieser Gleichung eine Beziehung zwischen den gesuchten Koeffizienten aufstellt. Dies ist insbesondere dann möglich, wenn als Annäherungsfunktionen Polynome gewählt werden. Der Grad dieser Polynome muß dann so bestimmt werden, daß für jede Randbedingung und für jede Kollokationsstelle ein besonderer Koeffizient vorgesehen werden und ein weiterer Koeffizient vorbehalten werden muß, der durch die Variationsbedingung bestimmt wird.

Hat man daher z. B. eine Differentialgleichung zweiter Ordnung als Euler-Lagrangesche Gleichung eines Variationsproblems, und werden zwei Kollokationsstellen vorgesehen, so muß man ein Annäherungspolynom vierter Ordnung mit fünf Koeffizienten wählen. In der Regel genügt es, ein einziges solches Polynom zu wählen, sofern nicht eine besonders hohe Genauigkeit verlangt wird. Der verbleibende Koeffizient der Euler-Lagrangeschen Gleichung verlangt dann die Auflösung einer einzigen linearen Gleichung. Die Genauigkeit der so erhaltenen Lösung ist dann fast so gut wie bei der gewöhnlichen Methode unter Verwendung von zwei oder drei Annäherungspolynomen.

Wenn daher für die zu bestimmende Funktion das Variationsintegral  $I[y] = 0$ , und die zugehörige Euler-Lagrangesche Gleichung in der Form  $L[y] = 0$  ist, so haben die Kollokationsbedingungen die Form

$$\{L[y_i]\}_{x=x_j} = 0,$$

die weiterhin gerade so zu behandeln sind wie die Randbedingungen des Problems. [Eine ausführlichere Darstellung mit einigen einfachen Beispielen wird in einem der nächsten Hefte des Ingenieur-Archivs erscheinen.]

W. JENNE (Frankfurt/M.): Bemerkungen zur rechnerischen Auflösung der POISSONschen Gleichung.

(1.) Bedeutung der Poissonschen Gleichung für Geophysik, Geodäsie, Meteorologie. (2.) E. Stiefels „Blockbild“ und K. Friedrichs Punktdarstellung eines Normalgleichungssystems. (3.) Beispiele

Zu 1: *Geophysik*. Wegen der Erdrotation tritt die *Poissonsche Gleichung* in folgender Form auf:

$$\Delta W = -4\pi f\rho + 2\omega^2$$

( $\Delta$  = *Laplacescher Operator*,  $W$  = *Kräftefunktion* der Erdmassen,  $f$  = *Gravitationskonstante*,  $\rho$  = *spezifische Dichte*,  $\omega$  = *Winkelgeschwindigkeit* der Erdrotation). Die Schwierigkeit der Integration der wohlbekannten partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung liegt hier, da die kleinen Schwankungen von  $\rho$  weit unterhalb der Beobachtungsgenauigkeit der Schwerekräftmessungen liegen, in der Hauptsache darin, daß einerseits die spezifische Dichte  $\rho$  der Erdmassen nur ganz roh bestenfalls für die Erde bekannt ist, und daß andererseits die Randbedingungen nur unvollkommen vorliegen, weil die bisher durchgeführten Messungen der Schwerkraftbeschleunigung heute noch nicht gleichmäßig genug über die Erdoberfläche verteilt und auch nicht zahlreich genug sind. — *Geodäsie*. In der nach dem Tode des Verfassers veröffentlichten unvollendeten Abhandlung: *G. Förstner*, *Statik trigonometrischer Netze* [Mitt. Reichsamt f. Landesaufnahme 1934/35, Nr. 1, 13—25] vergleicht dieser ein trigonometrisches Netz mit einem elastischen Körper; den Molekülen entsprechen die Ergebnisse der Stationsausgleichungen, den zwischen den Molekülen wirksamen Kräften die für das Netz geltenden Bedingungen. Ergebnis: Werden einem zwangsfrei ausgeglichenen trigonometrischen Netz Zwangsbedingungen auferlegt, die nicht aus der Netzkonfiguration allein entspringen, — *Basisidentitätsbedingungen*, *Azimuthbedingungen*, *Zwangsanschlüsse* —, so genügen die hierdurch bewirkten Verschiebungen der Netzknoten den bekannten Bedingungen der konformen Abbildung. — *Meteorologie*. Hier interessiert im Gegensatz zur Geophysik und Geodäsie gerade der zeitliche Ablauf, d. h. anstelle von Randbedingungen handelt es sich um ein Problem mit Anfangsbedingungen.

Zu 2: *E. Stiefels* Blockbild [Über einige Methoden der Relaxationsrechnung. *Z. ANGEW. MATH. PHYS.* 3, 4, 1952] kann als Punktdarstellung im Sinne von *K. Friedrich* gedeutet werden. Es deckt sich nämlich in diesem Falle das Netzbild mit der Punktdarstellung, wie dies auch bei anderen linearen Gleichungssystemen der Fall ist, z. B. bei der Berechnung elektrischer Leitungsnetze [*Friedrich* 1930 in der *Z. VERMESS.-WES.*]. Darüber hinausgehend erkannte jedoch *Friedrich*, daß die Punktdarstellung auch dann die Berechnung der inversen Matrix wesentlich zu erleichtern vermag, wenn sich Netzbild und Punktdarstellung nicht decken.

*H. WITTMAYER* (Svenska Aeroplan AB (SAAB), Linköping): *Berechnung einzelner Eigenwerte eines algebraischen linearen Eigenwertproblems durch „Störiteration“*.

Eine gegebene Näherungslösung für einen gesuchten beliebigen einfachen Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor wird durch eine Störungsrechnung erster Ordnung verbessert. Dies Verfahren liefert, zu einer Iteration, der „Störiteration“, ausgebaut, die gleiche Folge von Näherungswerten wie die „gebrochene Iteration“ von *Wielandt* [vgl. *R. Zurmühl*, *Matrizen*, Springer Berlin - Göttingen - Heidelberg 1950, S. 311 ff.]. Während jedoch bei der gebrochenen Iteration bei jedem Schritt ein Gleichungssystem mit  $n$  Unbekannten aufzulösen ist, das leicht eine fast singuläre Matrix haben kann, ist bei der Störiteration (nach einem Vorbereitungs-schritt) jeweils ein gut lösbares Gleichungssystem mit  $(n-1)$  Unbekannten zu lösen. Bei beiden Verfahren ändern sich die linken Seiten der zu lösenden Gleichungssysteme nicht von einem Schritt zum anderen. Die Nähe



ungswerte für die Eigenwerte können als verallgemeinerte *Rayleigh-Quotienten* gedeutet werden. — Neben einem Rechenschema zur Durchführung der Störiteration mit einer Tischrechenmaschine ist ein weiteres aufgestellt, das die Anwendung eines Rechenautomaten gestattet. — Mittels der Störiteration kann man in einfacher Weise die Abhängigkeit eines beliebigen einfachen Eigenwertes von einem in den Matrizen der Eigenwertaufgabe enthaltenen Parameter berechnen. Dies ist praktisch wichtig bei der Durchführung von Flatteruntersuchungen mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden.

V. J. DÖRR (Darmstadt): *Untersuchung eines Systems nichtlinearer Differentialgleichungen der Chemie.*

Die chemische Reaktion mehrerer Stoffe läßt sich durch Systeme von Differentialgleichungen beschreiben, die ausgeprägt nichtlinear sind. Abgesehen von wenigen elementaren Fällen ist keine formelmäßige Lösung bekannt. Jedes kompliziertere System erfordert eine individuelle Behandlung, auch wenn nur numerische Methoden angewandt werden. Eingehender wurde ein aus der Praxis stammendes System von vier Gleichungen untersucht. Da die darin auftretenden Parameter in ihrer Größenordnung stark verschieden waren, ergaben sich mit den bekannten numerischen Verfahren extrem kleine Schrittweiten. Durch formale Integration einer der vier Differentialgleichungen und asymptotische Entwicklung des Integrals wurden etwa 200 mal so große Schrittweiten möglich. Die erhaltenen Lösungen zeichnen sich durch eine doppelstufenartige Form aus, wobei die erste Stufe relativ scharf, die zweite sehr sanft ist. Die numerischen Ergebnisse wurden durch sogenannte Primitivlösungen bestätigt. Dazu wurde das wirkliche System zu einem Primitivsystem vereinfacht, welches formelmäßige Behandlung erlaubt.

### *Fachsitzung B: Mechanik*

Vorsitz: F. Schultz-Grunow (Aachen)

E. HÖLDER (Leipzig) *Über die Charakteristikentheorie des plastischen Fließens.*

Berücksichtigt man beim stationären ebenen Fließen eines elastisch-plastischen kompressiblen Materials die Geschwindigkeitskomponenten, die mit dem Schubmodul dividiert auftreten, so werden die charakteristischen Gleichungen des Spannungsproblems (*v. Mises*) und des Geschwindigkeitsproblems (*Geiringer*) gekoppelt und die gemeinsamen beiden charakteristischen Richtungen jeweils in ein Doublett aufgespalten. Bei der *G. I. Taylor*-schen Annahme des work hardenings sind diese charakteristischen Richtungen überdies erst dann reell, wenn die Strömungsgeschwindigkeit eine gewisse kritische Geschwindigkeit überschreitet.

W. NOLL (Berlin): *Neue Klassen kontinuierlicher Medien.*

Es wird eine sehr allgemeine Materialgleichung betrachtet, die für beliebige endliche Deformationen im dreidimensionalen Raum sinnvoll ist, da sie gewisse Invarianzprinzipien (Isotropie des Raumes) befriedigt. Es wird diskutiert, welche Klassen von Medien durch die allgemeine Gleichung beschrieben werden. Unter anderem sind elastische Stoffe (endliche Deformationen) und viskose Flüssigkeiten als Spezialfälle enthalten. Ein weiterer Spezialfall sind die „fließenden Stoffe“, deren Eigenschaften etwas nä-

her untersucht werden. Sie ergeben sich aus einer dreidimensionalen, nicht-linearen Verallgemeinerung der bekannten *Maxwellschen* Relaxationstheorie.

D. MORGENSTERN (TU Berlin-Charlottenburg): *Zur exakten Grundlegung der kinetischen Gastheorie (MAXWELL-BOLTZMANNsche Gleichung).*

Es wird über Fortschritte bezüglich der Existenz und der Gewinnung von Lösungen durch Iterationsverfahren bei der *Maxwell-Boltzmannschen* Gleichung berichtet. Das Ergebnis des Vortragenden [PROC. ACAD. SCI. USA 40, 719—721, 1954] wird auf allgemeinere Klassen von Molekülmodellen verallgemeinert. Durch das neue Beweisverfahren wird auch eine modifizierte *Maxwell-Boltzmannsche* Gleichung erfaßt, deren physikalischer Sinn hervorgehoben wird. Auch ein Resultat über das Limes-Verhalten bei  $t \rightarrow \infty$  wird erwähnt. Die Ergebnisse sind zum größten Teil im Druck [J. RAT. MECH. ANAL. 4, 1955].

### Fachsitzung C: Strömungslehre

Vorsitz: H. Schlichting (Braunschweig)

J. ACKERET (ETH Zürich): *Nabeneffekte bei axialen Radgittern.*

Axiale Radgitter werden meistens so behandelt, daß sie in ein ebenes Gitter abgewickelt werden. Es treten aber schon in der Potentialtheorie Einflüsse der zylindrischen Radbegrenzungen an Nabe und am Außenzylinder auf. Man kann sie näherungsweise berechnen; auch ist von Th. Ginsburg im Elektrolyttrog das Strömungsfeld ausgemessen worden. Es ergeben sich Zusatzgeschwindigkeiten und Zusatzkrümmungen, die bei Rädern mit geringer Schaufelzahl (Kaplan-Turbinen) Beträge annehmen können, die nicht mehr vernachlässigbar sind.

K. SAMELSON (München): *Ein Charakteristiken-Verfahren zur Berechnung dreidimensionaler stationärer Überschallströmungen.*

Aus der Kontinuitätsgleichung und den Gleichungen des Wirbelsatzes von Crocco wird das System der Richtungs- und Verträglichkeitsbedingungen abgeleitet. Als charakteristische Flächen ergeben sich die *Machflächen* sowie die aus Stromlinien aufgebauten Stromflächen. Für die numerische Integration wird aus zwei Scharen von *Machflächen* sowie einer Stromlinienschar ein Raumgitter aufgebaut. In den Knotenpunkten des Gitters werden die Verträglichkeitsbedingungen durch Differenzengleichungen approximiert, die eine iterative Bestimmung der Strömungsdaten gestatten.

J. ZIEREP (Math. Inst. d. TU Berlin-Charlottenburg): *Über die unsymmetrische Überschallströmung hinter einem Ring.*

Die Strömung um einen einzelnen Ring — mit Ausnahme des Einflußgebietes der Ringhinterkante — kann nach einem Charakteristikenverfahren von Haack [Z. ANGEW. MATH. PHYS. 1, 357—375, 1951] bzw. Erdmann-Oswatitsch [Z. F. W., H. 8, 1954, S. 201—215] bestimmt werden. Von der Hinterkante des Ringes geht wegen des dort vorhandenen Drucksprunges eine Unstetigkeitsfläche ab. Es wird die Strömung im Einflußgebiet der Ringhinterkante durch Lösen eines charakteristischen Anfangswertproblems bestimmt und es werden Aussagen über die Gestalt der freien Oberfläche gemacht. Letzteres aufgrund der Bedingung



en, daß (1) der Druck stetig sein muß beim Durchgang durch die Fläche und (2) der Strömungsvektor in der Tangentialebene der Fläche liegen muß. Die Arbeit dient der Berechnung der unsymmetrischen Überschallströmung durch zwei hintereinander angeordnete ringförmige Flügel (Ring-sweitwerk) über einem Flugkörper. Für den zweiten Ring wird der folgende Wert bestimmt:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\text{Auftrieb}}{\sin \vartheta} = \frac{\partial \text{Auftrieb}}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0}$$

und nachgewiesen, daß der Auftrieb eines Mehrfachringleitwerkes gegenüber dem eines Einzelringes — derselben Gesamtlänge — um Beträchtliches vermehrt werden kann. Dies wurde durch Versuche in der Praxis bestens bestätigt.

A. J. MÜNCH und F. L. BAUER (Math. Inst. d. TH München): *Das Quellen-sinkenverfahren für die linearisierte Überschallströmung um schlanke Drehkörper, deren Kontur Knicke aufweist.* (Voretr. von F. L. Bauer.)

Wir untersuchten die zu einem Potenzsatz für die Quellbelegung gehörende linearisierte Überschallströmung für den Grenzfall des Exponenten  $1/2$ . Die in Kugelfunktionen 2. Art ausdrückbaren Geschwindigkeitskomponenten — sie reduzieren sich in diesem Fall auf elliptische Integrale — weisen auf dem stromabwärts gerichteten Machkegel einen endlichen Sprung auf wie man beim Vergleich mit der Methode der Abel-Transformation von (Leinz erwartet).

Der Einbau einer entsprechenden Modifikation etwa in das Verfahren von Kármán bereitet keine Schwierigkeiten; die Quellstärke der hinzunehmenden Belegung errechnet sich unmittelbar aus der Größe des Knicks auf der Kontur.

## Nachmittags

### Gemeinsame Sitzung: Forschungsberichte

Vorsitz: H. Schäfer (Braunschweig)

H. W. EMMONS (Cambridge/Mass.): *Boundary Layer Combustion of Liquid Fuels.*

C. TRUESDELL (Bloomington, Ind.): *Das ungelöste Hauptproblem der endlichen Elastizitätstheorie.*

Die bemerkenswerten Fortschritte der letzten Jahre in der endlichen Elastizitätstheorie verdankt man der Vermeidung spezieller Ansätze. Die Lösungen, ob exakt oder numerisch, sind für allgemeine Formänderungsarbeiten  $\Sigma$  gültig. In der gewöhnlichen Theorie ist  $\Sigma$  eine quadratische Form, die aber schon hier nicht völlig willkürlich sein darf, sondern positiv definit sein muß. Vor drei Jahren hat der Verfasser die entsprechende Frage in der endlichen Theorie aufgeworfen und gleichzeitig einige Ungleichungen, die er als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen vermutete, vorgeschlagen. In diesem Vortrag faßte er die späteren Untersuchungen in dieser Frage zusammen.

H. SCHLICHTING (Inst. f. Strömungsmech. d. TH Braunschweig): *Untersuchungen an Schaufelgittern von Strömungsmaschinen.*

Es wird ein zusammenfassender Überblick gegeben über umfangreiche systematische Untersuchungen über die Strömung durch Schaufelgitter, die seit einigen Jahren im Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig im Gange sind. Der leitende Gesichtspunkt dieser Untersuchungen ist, durch eine weitgehende Analyse zu einem tieferen Verständnis der sehr komplizierten Strömungsvorgänge vorzudringen. Deshalb ist zunächst das ebene Schaufelgitter unter Zugrundelegung der tragflügeltheoretischen Auffassung theoretisch und experimentell eingehend untersucht worden. Für die reibungslose inkompressible Strömung durch ein ebenes Schaufelgitter ist je eine neue einfache Lösung für die sog. erste und zweite Hauptaufgabe ausgearbeitet worden. Darüberhinaus ist es gelungen, die Verlustbeiwerte von ebenen Schaufelgittern durch Anwendung der Grenzschichttheorie erstmalig theoretisch zu ermitteln in befriedigender Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen.

Die Übertragbarkeit der Ergebnisse des ebenen Schaufelgitters auf Axialgitter mit ihrer über den Radius veränderlichen Teilung (Fächerung) ist an einer umfangreichen Meßreihe von feststehenden Axialgittern (Leiträdern) mit verschiedenem Nabenverhältnis untersucht worden. Dabei konnte für Turbinengitter nachgewiesen werden, daß alle wesentlichen aerodynamischen Beiwerte eines Axialgitters (Druckverteilung, Verlustbeiwerte, Abströmwinkel) in zuverlässiger Weise aus denen des ebenen Gitters ermittelt werden können.

Von Sondereinflüssen sind für das ebene Schaufelgitter untersucht worden: (1) der Einfluß der Kompressibilität bei Unterschallgeschwindigkeit durch Übertragung der *Prandtl-Glauert*schen Regel vom Einzeltragflügel auf das Gitter; (2) der Einfluß der Oberflächenrauigkeit auf den Verlustbeiwert für Turbinengitter; (3) der Einfluß der seitlichen Begrenzungswände eines ebenen Schaufelgitters auf dessen Randverluste.

T. P. ANGELISCH (Math. Inst. d. Serb. Akad. d. Wiss. Belgrad): *Über die Bewegung nichtholonomen Systeme in der Flüssigkeit.*

Es wird das Problem der Bewegung des nichtholonomen Systems in einer inkompressiblen Flüssigkeit behandelt, wobei man den Einfluß der Flüssigkeit auf die Bewegung des Systems vor Augen hat. Es werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt.

Das Problem wird ähnlich wie das entsprechende der holonomen Systeme behandelt, und man erhält ähnliche Resultate. Nämlich, wenn man eine homogene und ideale Flüssigkeit voraussetzt und noch annimmt, daß die Flüssigkeit zusammen mit dem nichtholonomen System ein dynamisches System bildet, so zeigt sich, daß eigentlich sich die Anwesenheit der Flüssigkeit nur durch die um die kinetische Energie der Flüssigkeit vermehrte kinetische Energie des nichtholonomen Systems kundtut. Unter der Voraussetzung, daß die Bewegung der Flüssigkeit allein von der Bewegung des Systems abhängig ist, wird diese außerdem eine Potentialbewegung. Man werden dann beide Möglichkeiten, also der azyklischen sowie zyklischen Strömung gesondert betrachtet. Auf diese Art und Weise, wenn das nichtholonome System durch  $n+k$  unabhängige Koordinaten

$$q^j \quad (j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+k)$$

bestimmt und die nichtholonomen Bindungen durch die Gleichungen



$$dq^{n+\nu}/dt = a_i^\nu dq^i/dt + a^\nu \quad (i = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, k)$$

festgelegt sind, lassen sich Bewegungsgleichungen *Lagrangescher* oder auch anderer Art aufstellen, die für nichtholonome Systeme gelten.

### Fachsitzung A: Angewandte Mathematik

Vorsitz: J. Heinhold (München)

H. EHRMANN (Clausthal-Zellerfeld): *Über Existenzsätze für periodische Lösungen bei nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen.*

Bei den nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen gibt es eine Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die in bezug auf die praktische Untersuchung ihrer periodischen Lösungen durch Näherungsmethoden sehr eingehend untersucht worden ist, bei denen aber noch kein Existenzsatz für diese Lösungen vorlag. Dies sind insbesondere die ungedämpften erzwungenen Schwingungen, bei denen die Rückstellkraft stärker als der Ausschlag gegen Unendlich geht (harte Feder). An Hand der Methoden für den Nachweis von periodischen Lösungen bei Schwingungsdifferentialgleichungen, die man unter gewissen Beschränkungen in drei Gruppen einteilen kann, läßt sich zeigen, warum mit ihnen die betr. Existenzsätze nicht durchgeführt werden konnten.

Die entsprechenden Sätze werden angegeben. Es zeigt sich, daß es in den betr. Fällen im allgemeinen sogar unendlich viele Lösungen gibt. Ferner gelingt es auch, allgemeine Existenzsätze für subharmonische Lösungen aufzustellen.

K. MAGNUS (Math. Inst. d. Univ. Freiburg): *Ein Beitrag zur Berechnung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme.*

Die Aussagen der Methode der kleinen Schwingungen sind bei komplizierten dynamischen Systemen in vielen Fällen unbefriedigend. Die weiterreichenden, bekannten Verfahren von *Poincaré* und *Liapunow* erfordern jedoch zu ihrer praktischen Durchführung einen derartigen Rechenaufwand, daß sie bei Systemen höherer Ordnung selten angewendet werden können. Meist ist daher die von *Krylow* und *Bogoljubow* begründete „Methode der harmonischen Balance“ vorzuziehen, die einen im Kleinen quantitativen, im Großen qualitativen Überblick über das Verhalten dynamischer Systeme gibt, und die in den letzten Jahren in steigendem Maße verwendet wurde. Es läßt sich nun zeigen, daß dieser Ansatz in Verbindung mit den *Hurwitzschen* Stabilitätsbedingungen zu einer sehr allgemeinen Methode ausgebaut werden kann. Es lassen sich auf diese Weise die bekannten linearen Stabilitätskriterien für nichtlineare Systeme verallgemeinern; weiterhin können einfache Kriterien für Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit einer Stabilitätsgrenze — und zwar sowohl im Kleinen als auch im Großen — abgeleitet werden. Auch die Frage der weichen oder harten Erregung in selbstschwingenden Systemen kann entschieden werden, und schließlich werden Erkenntnisse über das Auftreten stabiler und labiler Grenzyklen im Phasenporträt eines Systems gewonnen.

Das Verfahren ist ein Näherungsverfahren, für das bisher eine allgemeine Fehlerabschätzung noch nicht gelungen ist. Es liefert jedoch in jedem Falle mehr, als die in solchen Fällen bisher meist verwendete Methode der kleinen Schwingungen, die für den Grenzfall verschwindender Amplituden daraus hervorgeht.

*S. SCHOTTLAENDER (Math. Inst. d. Univ. Würzburg): Über gemischte Regelungen.*

Unter einer gemischten Regelung mit Stellgeschwindigkeitszuordnung soll eine Regelung verstanden werden, deren Stellglied  $\gamma(x, \dot{x}, t)$  eine lineare, homogene Funktion der Regelgröße  $x(t)$  und deren zeitlicher Ableitung ist, solange die zeitliche Ableitung des Stellgliedes (also die Stellgeschwindigkeit  $\dot{\gamma}$ ) im Betrag unter einer gewissen Sättigungsgrenze (z. B. Maximaldrehzahl des Stellmotors) liegt. Bei Überschreitung dieser Grenze soll jedoch das Stellglied eine lineare Funktion der Zeit allein sein, deren Ableitung den Betrag des Sättigungswertes, aber wechselndes Vorzeichen hat. Umschaltunkte dieser Regelung liegen immer dort, wo das Stellglied  $\gamma$  mit einer gewissen Führungsgröße  $g$  übereinstimmt. Für die Lage des ersten auf  $t = 0$  folgenden Umschaltpunktes der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = -\gamma$$

werden obere Schranken angegeben. Ferner wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür abgeleitet, daß eine begonnene Regelung die Sättigungsgrenzen nicht mehr überschreitet. Um über das Gesamtverhalten der geregelten Schwingung einen Überblick zu bekommen, interessiert vor allem die Frage nach der Verteilung der Umschaltpunkte. Eine Regelung, deren Schaltpunktfolge abbricht, wird immer zum völligen Abklingen führen. Eine Regelung, deren Schaltpunktfolge für große  $t$  äquidistant ist, wird dagegen auf eine periodische Schwingung führen, und das Bestreber muß jetzt dahin gehen, diese möglichst klein zu halten, so daß die bleibende Störung praktisch doch bedeutungslos ist. Schließlich ist noch die Frage zu stellen, ob es Regelkonstanten derart gibt, daß sogar jede beliebige Störung entweder völlig oder wenigstens auf eine kleinbleibende periodische Störung abklingt.

#### *Fachsitzung B: Mechanik*

Vorsitz: W. Kucharski (Berlin)

*E. MÖNCH und R. JIRA (München): Studie zur Photoplastizität von Celluloid am Rohr unter Innendruck. (Vorgetr. von E. Mönch.)*

Im Zuge von Untersuchungen, die die Grundlagen für spannungsoptische Versuche im plastischen Gebiet festlegen sollen, wurde ein Celluloidrohr durch Innendruck plastisch verformt. Auf diese Weise kann ein genau definierter homogener zweiachsiger Spannungszustand auch im Plastischen erzeugt werden. Durch Vergleich mit einachsigem Zug ergibt sich, daß auch bei Celluloid wie bei Metallen die oktaedrale Schubspannung für das plastische Verhalten maßgebend ist. Ferner wird die früher aufgestellte Behauptung, daß die Dispersion der Doppelbrechung als Maß für den Grad der plastischen Verformung angesehen werden kann, erneut bestätigt.

*H. SCHWIEGER und H. DIETZ (II. Phys. Inst. d. Univ. Halle): Polarisationsoptische Versuche zur elastischen Stoßtheorie von St. Venant und A. Flamant. (Vorgetr. von H. Schwieger.)*

Die elastische Stoßtheorie von St. Venant und A. Flamant beschreibt den Längsstoß einer starren Masse gegen einen festgehaltenen elastischen Stab. Insbesondere zeigt sie, welche Verschiebungen, Spannungen usw. in dem gestoßenen Stab innerhalb der Berührungsdauer beider Stoßkörper auftreten.



treten. Im folgenden wird nun berichtet, wie beim Längsstoß eines Metallstabes gegen einen Glasstab die Druckspannungen in ihrem zeitlichen Verlauf und in ihrer Größe polarisationsoptisch gemessen werden. Zur quantitativen Bestimmung der zeitlich sich ändernden Spannungen wurde ein neues polarisationsoptisch-elektrisches Verfahren benutzt.

Die Ergebnisse zeigen im Vergleich zu den elastischen Stoßtheorien von St. Venant - A. Flamant und von F. Neumann, daß die physikalischen Verhältnisse komplizierter sind, als sie von den Theorien aufgezeigt werden. Für die Unterschiede zwischen Theorie und Praxis werden physikalische Erklärungen gegeben. [Zusammenfassender Bericht demnächst in den JAHN. PHYS.]

W. ULLMANN (Inst. f. Bodendyn. und Erdbebenforsch. Jena): *Zur Klassifikation der Erschütterungsmesser.*

In der klassischen Seismometrie blieben die Gestellbewegungen des Stationsseismographen auf Translationen in einer kleinen Umgebung der Ruhelage des Gestells beschränkt (Wiechert, 1903). Die Erweiterung des Anwendungsbereiches der Seismographen, Schwingungs- oder Erschütterungsmesser (z.B. Erschütterungsmessungen in bewegten Fahrzeugen) führte zur Annahme beliebiger Gestellbewegungen (Gassmann, 1937), während die Bewegungen des Gehänges relativ zum Gestell nach wie vor als hinreichend kleine Schwingungen vorausgesetzt wurden. Wird nun auch diese einschränkende Bedingung (wenigstens vorübergehend) aufgegeben, dann treten die sog. Übertragungsfaktoren im allgemeinen als Ortsfunktionen in Erscheinung und gestatten erst unter diesem erweiterten Aspekt eine befriedigende mechanische Interpretation. Das Gassmannsche Klassifikationsprinzip [Gassmann, Über mechanische Empfänger von Seismographen und Schwingungsmessern, ETH Zürich, 1951] wird bei ortsvariablen Übertragungsfaktoren zugrunde gelegt. Von den drei sog. Grundformen erfordert die Realisierung derjenigen Grundform, die gegen jede Drehgeschwindigkeit und -beschleunigung des Gestells unempfindlich ist, eine neuartige Gehängekonstruktion.

### *Fachsitzung C: Strömungslehre*

Vorsitz: W. Schmeidler (Berlin)

S. B. BERNDT (Flygtekniska försöksanstaten, Ulvsunda): *On the Drag of Slender Bodies at MACH Number One.*

According to Oswatitsch slender bodies having the same distribution of cross-sectional area are equivalent in the sense that the flow fields at transonic speed differ only in the immediate neighbourhood of the bodies, where furthermore linearized theory can be used to calculate the difference. This property is used to investigate how the difference in form drag depends upon the difference in form of equivalent bodies.

As a tool is used an integral formula expressing the drag acting in front of an infinite plane perpendicular to the free stream by means of the flow of momentum through that plane. In order to establish that the integrals concerned exist when the free stream Mach number approaches one, certain estimates due to Guderley et al. are introduced. These describe asymptotically the fields far away from the bodies when the free stream Mach number is close to one.

It is found that equivalent bodies having the same cross section at the rear end and the same distribution of slope around this section have the same drag. An explicit formula is derived for calculating the excess drag of an arbitrary body compared to the drag of the equivalent body of revolution.

J. WEISSINGER (Inst. f. Angew. Math. d. TH Karlsruhe): *Die Druckverteilung dünner, fast drehsymmetrischer Ringflügel in Unterschallströmung.*

Der Ringflügel wird ersetzt durch ein System von tragenden Ringwirbeln mit punktwise veränderlicher Zirkulation nebst abgehenden, nichttragenden, geradlinigen Wirbeln. Das ganze Wirbelsystem liegt auf einem Kreiszylinder. Die unbekannte Zirkulationsverteilung wird so bestimmt, daß die induzierte Radialkomponente am Zylinder gleich der bekannten Normalkomponente der Anströmungsgeschwindigkeit am Flügel ist. Die so gewonnene, zweidimensionale Integralgleichung läßt sich durch *Fourier-Entwicklung* aufspalten in lauter einzelne, eindimensionale Integralgleichungen, für welche ein einfaches, numerisches Lösungsverfahren angegeben wird. Für Auftrieb und Moment werden explizite Näherungsformeln entwickelt. Insbesondere für den Fall des schräg angeströmten, kreiszylindrischen Flügels werden numerische Ergebnisse mitgeteilt.

K. STÖCKEL (Berlin): *Erläuterung und Vorführung einer Oszillationsmaschine zur Demonstration und zahlenmäßigen Untersuchung der Erscheinungen am Schwerependel mit oszillierendem Drehpunkt.*

Vorführung der Maschine im Betrieb bei horizontaler Oszillationsrichtung. Kurzer Abriß einer vollständigen Theorie unter Berücksichtigung von Dämpfungen und Elastizitäten in der Pendelstange und in den Lagerungen, wobei bisher unbekannte stabile Lagen auftreten.

Vorführung mit vertikaler Oszillationsrichtung sowie Mitteilung der Ergebnisse von ziffernmäßigen Versuchen. Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie.



DONNERSTAG, DER 2. JUNI 1955

Vormittags

Gemeinsame Sitzung: Forschungsberichte

Vorsitz: H. Görtler (Freiburg)

S. I. PAI (Inst. f. Fluid Dyn. a. Appl. Math., Univ. of Maryland, College Park): *Jet Mixing of Two Compressible Fluids.*

The problem of laminar jet mixing of two perfect gases has been formulated so that the effect of heat release due to chemical reaction is included. The essential feature of the jet mixing of two fluids is that the mixture is a heterogeneous substance. Besides the ordinary dependent variables: velocity components, pressure, density, and temperature, a new variable, the concentration of one fluid in the other enters. Therefore in the fundamental equations, one has to add another relation to determine this new variable, i. e., the equation of diffusion. The chemical reaction is considered by using Arrhenius law.

The fundamental equations are discussed. If the boundary layer approximations are used, these equations for two dimensional steady flow are reduced to a system of three generalized heat conduction equations which can be solved by stepwise numerical procedure from the known initial conditions.

Important parameters in this problem have been brought out. Simplified examples are worked out. In the case of isovel jet mixing of two gases with chemical reaction, the development of flame front is obtained.

C. SCHMIEDEN (Darmstadt): *Eine strenge rotations-symmetrische Lösung der NAVIER-STOKES-Differentialgleichungen.*

Wird die z-Achse eines räumlichen Koordinaten-Systems gleichmäßig mit Quellen belegt, während die x-y-Ebene feste Wand sein soll, so lassen sich die Navier-Stokes-Differentialgleichungen bei Einführung räumlicher Polarkoordinaten und der Stokesschen Stromfunktion separieren, wobei für die Abhängigkeit der Stromfunktion vom Winkel sich eine Riccatische Differentialgleichung endgültig ergibt. Für zahlreiche Quellstärken kann die Lösung dieser Differentialgleichung in geschlossener Form angegeben werden. Alle Lösungen lassen sich in den unteren Halbraum fortsetzen und liefern dort wiederum in der negativen z-Achse eine Quellstrecke mit im allgemeinen anderer Stärke als im oberen Halbraum. Die Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht an der Wand zeigen als Charakteristikum sämtlich eine Annäherung an die Asymptote von oben und nicht, wie üblich, von unten.

Vorsitz: K. Schröder (Berlin)

F. SCHULTZ-GRUNOW (Inst. f. Mech. d. TH Aachen): *Das Ähnlichkeitsgesetz der laminaren Flammenfortpflanzung und ihre Grenzen.*

Aus dem Prinzip, daß jede physikalische Aussage vom Maßsystem unabhängig ist, wird das Ähnlichkeitsgesetz der Flammenfortpflanzung und der Fortpflanzungsgrenzen aus dem Experiment hergeleitet ohne vereinfachende Annahmen. Es läßt sich die Ordnung der Gesamtreaktion ermitteln. Für die obere und untere Fortpflanzungsgrenze ergibt sich eine ein-

zige Aussage. Die erhaltenen Gesetzmäßigkeiten stehen mit verschiedenen Versuchen über die Flammenfortpflanzung, ihre Grenzen und die Druckabhängigkeit in Übereinstimmung.

H. GÖRTLER (Univ. Freiburg i. Br.): *Dreidimensionales zur Stabilitätstheorie laminarer Grenzschichten.*

Übersichtsbericht über einige neuere — vorwiegend noch nicht in Zeitschriften zugängliche — Fortschritte. (a) Die Theorie des Referenten (1940) über die Instabilität ebener laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden wurde durch eine mathematisch strenge Integration des zugehörigen Eigenwertproblems gesichert (G. Hämmerlin) und in ihren numerischen Resultaten auch von anderen Autoren bestätigt (A. M. O. Smith, R. C. De Prima). (b) Eine Erweiterung der Theorie auf allgemeinere Grenzschichtströmungen ist in Angriff genommen, insbesondere ist die ebene Staupunktströmung als instabil gegenüber verwandten wirbelartigen Störungen nachgewiesen worden (H. Görtler und G. Hämmerlin). (c) Die Instabilität gegenüber wirbelartigen Störungen an konkaven Wänden, von H. W. Liepmann (1943) erstmals experimentell bestätigt, wurde neuerdings durch Sichtbarmachung an der konkaven Klappe hinter dem Absaugeschlitz eines Griffith-Tragflügelprofils nachgewiesen (N. Gregory und W. S. Walker). (d) Dreidimensionale laminare Grenzschichten an schiebenden Flügeln und an der rotierenden Scheibe wurden auf ihre Stabilität experimentell (N. Gregory und W. S. Walker) und theoretisch (J. T. Stuart) untersucht. Offenbar setzen sich die zum Umschlag führenden Störungen aus Wellen analog den Tollmien-Schlichtingschen Wellen und Wirbeln, schwächer verwandt mit jenen des Referenten, zusammen. (e) Es wird vermutet, daß die Instabilität ebener Grenzschichten gegenüber den ebenen Tollmien-Schlichtingschen Wellen in den Wellentälern in der kritischen Zone zu einer sekundären Instabilität gegenüber dreidimensionalen Wirbeln (wie an konkaven Wänden) führt als nächstes Zwischenstadium vor dem eigentlichen Umschlag in turbulente Strömung.

#### Fachsitzung A: Angewandte Mathematik

Vorsitz: G. Schulz (Stuttgart)

F. L. BAUER (Math. Inst. d. TH München): *Direkte Faktorisierung von Polynomen.*

Wir behandeln die Aufgabe: Ein Polynom  $P(x)$  vom Grad  $n$  soll in zwei Faktoren vom Grad  $i$  und  $n-i$  zerlegt werden, wobei die Nullstellen des einen Faktors absolut größer als die des anderen Faktors sind. Dies leistet ein Iterationsverfahren mit linearer Konvergenz, das direkt gegen die beiden Faktoren konvergiert, sobald die Aufgabe sinnvoll gestellt ist, also die obige Ungleichung erfüllt werden kann.

Das Verfahren kann als (rekurrente) Dreieckszerlegung einer gewissen dem Polynom  $P(x)$  zuzuordnenden (unendlichen Matrix) formuliert werden. Damit ist deutlich, daß es sich um einen einfachen — im übrigen selbst korrigierenden — Iterationsalgorithmus handelt, der auch für programmgesteuerte Rechenanlagen geeignet erscheint. Die Separationseigenschaft des Verfahrens kann durch eine vorangehende gebrochen-lineare Variablensubstitution beeinflusst werden. Solchermaßen erhält man u. a. eine Möglichkeit zur direkten Hurwitzfaktorisierung. Eine andere Verallgemeinerung liefert gleichzeitige Mehrfachfaktorisierung nach vorgegebenen Graden.



W. KLINGENBERG (Inst. f. Angew. Math. d. Univ. Hamburg): *Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in Gebieten mit stückweise rationalen Randkurven.*

Es wird ein Verfahren angegeben, die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in solchen Gebieten der komplexen Zahlenebene durch rationale Operationen zu berechnen, deren Rand sich aus endlich vielen Stücken von rationalen Kurven zusammensetzt. Bei der Spezialisierung des Gebietes auf eine Halbebene erhält man ein Verfahren von *Wielandt* [Aerodynam. Versuchsanstalt, Göttingen 1943] und bei dem Spezialfall eines Winkeltraumes erhält man ein Verfahren von *Sherman* [Phil. Mag. (7) 37, 1946]. Das Verfahren besteht aus folgenden Operationen: Für jedes der rationalen Kurvenstücke hat man zwei Rechenschritte zu vollziehen: (1) Man bestimmt, durch Einsetzen der Gleichung der rationalen Kurve in das Polynom, die Bildkurve, die selber wieder rational ist. (2) Man legt durch die beiden reellen Polynome, die als Zähler des Real- und Imaginärteils der Bildkurve auftreten, eine verallgemeinerte *Sturmsche Kette* mit Hilfe des euklidischen Algorithmus [vgl. *Willers*, Meth. der prakt. Analysis, Kap. 4] und bestimmt die Anzahl der Vorzeichenwechsel in diesen Ketten am Anfangs- und Endpunkt. — Auf dem Rande des Gebietes dürfen keine Nullstellen des Polynoms liegen. Ob diese Voraussetzung erfüllt ist, ergibt sich im Laufe der Rechnung. Falls der Rand den unendlich fernen Punkt enthält (wie etwa bei der Halbebene), so ist dieses in bekannter Weise zu berücksichtigen.

J. HEINHOLD (München): *Zur Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen.*

Es werden Abschätzungen für den Absolutbetrag der Wurzeln algebraischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten, sowie Kriterien für die Lage der Wurzeln bezüglich des Einheitskreises angegeben. Diese enthalten als Spezialfälle die bekannten Abschätzungen für Polynome mit positiven Koeffizienten von *Kakeya-Hurwitz*, sowie ein Kriterium von *Takahashi* und das bekannte Kriterium von *Eneström-Kakeya* über die Lage der Wurzeln zum Einheitskreis. Weiterhin wird die Frage untersucht, wann die angegebenen Abschätzungen „scharf“ sind, d. h. Nullstellen auf den Rändern der angegebenen Kreisbereiche gelegen sind.

H. ROHLER (Dresden): *Zur Umformung von Aussagenverknüpfungen, die nicht für alle Wertekombinationen der eingehenden Aussagen definiert sind.*

Beim Aufstellen von elektrischen Schaltungen für Rechanlagen kommt es häufig vor, daß ein logischer Ausdruck zugrunde gelegt werden muß, dessen Wahrheitswert nicht für alle Wertekombinationen der eingehenden zweiwertigen Grundaussagen vorgeschrieben ist. Die Umformung eines derartigen Ausdrucks mit Hilfe des zweiwertigen Aussagenkalküls der theoretischen Logik ist unter Umständen sehr mühsam und unübersichtlich. Es ist deshalb vorteilhaft, einen dreiwertigen Ausdruck einzuführen, der an allen unbestimmten Stellen den dritten Wahrheitswert annimmt. Dieser Ausdruck wird mittels des dreiwertigen Aussagenkalküls umgeformt. Durch einfaches Einsetzen erhält man danach eine zweiwertige Aussagenverknüpfung, die eine Schaltung beschreibt, welche alle geforderten Eigenschaften besitzt.

**E. PESTEL** (Hannover): *Zur Reduktion von Schwingerketten.*

Unter den Ingenieuren ist seit etwa 25 Jahren das Verfahren von *Baranow* zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Kurbelwellen wohl bekannt. Es wurde bis vor kurzem als Näherungsverfahren betrachtet, bis *Schaefer* vor zwei Jahren einen vollständigen Beweis für die Exaktheit der Methode erbrachte und gleichzeitig das Verfahren auf die Ermittlung der Eigenschwingungsformen erweiterte. In dem kurzen Referat wurde der Grundgedanke des *Baranow*-Verfahrens zur Reduktion von Schwingerketten auf anschaulichem Wege hergeleitet und ein einfacher Beweis für die Exaktheit dieser Methode erbracht.

**E. MEWES** (Inst. f. Landtechn. Grundlagenforsch. Braunschweig): *Bestimmung der Massenkräfte an ebenen zwangläufigen vier- und mehrgliedrigen Gelenkketten und verschiedene Ausgleichsmöglichkeiten.*

Der Verlauf der freien Massenkräfte eines Schubkurbelgetriebes unter Einschuß der Massenwirkungen der Schubstange wird in den drei Komponenten (zwei Kraftkomponenten und ein Moment) in *Fourier*-Reihen dargestellt. Bei mehrfacher Verwendung derartiger Getriebe in Reihemaschinen ist der Wegfall einzelner Teile der *Fourier*-Reihen als Ausgleich verschiedener Ordnung erörtert worden. Auch bei anderen Getrieben mit periodischem Verlauf (Kurbelgetrieben) wird durch mehrfache Verwendung der Getriebe ein entsprechender Ausgleich erreicht. Zur Feststellung der freien Massenkräfte bei derartigen Mehrfachgetrieben ist eine analytische Darstellung in *Fourier*-Reihen erwünscht. Diese gelang jetzt u. a. für Gelenkvierecke und mehrgliedrige Koppelgetriebe mit umlaufender Kurbel. Außer dem Massenausgleich durch Verwendung mehrerer gleicher Getriebe sind die Ausgleichsmöglichkeiten für die einzelnen Ordnungen der Massenkräfte durch zusätzliche Anbringung von harmonischen hin- und herschwingenden oder durch auf verschiedenen Wellen zwangläufig gegeneinander unwuchtig rotierende Massen festgestellt worden. Sind die Massenkräfte zeichnerisch ermittelt, so ist von den Auftragungen des Verlaufs der Komponenten eine harmonische Analyse vorzunehmen, wenn die entsprechenden Ausgleichsmassen ermittelt werden sollen. Im Gegensatz zu diesem Wege lassen sich bei analytischen Berechnungen beliebige Genauigkeiten erzielen.

**P. MATTHIEU** (TU Berlin): *Über die Berechnung der Hypoidgetriebe.*

Bekanntlich wurde die Theorie der geradverzahnten Stirn- und Kegeleräder schon im vergangenen Jahrhundert entwickelt und zu einer schönen mathematischen Theorie ausgebaut. Diese ist in gleicher Weise von theoretischem und praktischem Wert und bildet in letzterer Hinsicht die Grundlage für die Herstellung der entsprechenden Zahnradgetriebe.

Demgegenüber trotzten die in neuerer Zeit zu großer Bedeutung gelangten Hypoid- oder Schraubverzahnungen bis in die neueste Zeit allen Versuchen einer exakten mathematischen Behandlung. In zwei Arbeiten, die vom Verfasser kürzlich im „Ingenieur-Archiv“ veröffentlicht wurden, hat sich nun aber herausgestellt, daß dieses allgemeinste Verzahnungsproblem in überraschender Weise sogar in geschlossener Form gelöst werden kann. Anschließend läßt sich eine mathematische Theorie der Hypoidgetriebe aufbauen, die das Gegenstück bildet zu der oben genannten Theorie der geradverzahnten Stirn- und Kegeleräder. Es zeigt sich dabei, daß



Alle wichtigen Sätze der ebenen Verzahnungslehre mutatis mutandis auch auf den räumlichen Fall übertragen werden können. Hingegen treten der viel allgemeineren Problemstellung bei Hypoidrädern gemäß sehr viele neue und unerwartete Möglichkeiten von Verzahnungen auf.

L. MÜHE (Philipp Holzmann AG Frankfurt/M.): *Seilreibung bei veränderlicher Reibungszahl.*

Ausgehend von dem Coulombschen Reibungsgesetz ergibt sich die bekannte Theorie der Seilreibung. Wie aber zahlreiche Messungen bei Spanngliedern für Spannbeton zeigten, stimmt dies mit der Wirklichkeit nur schlecht überein. Es wird daher die Umlenkreibungszahl  $\mu$  als veränderlich (abhängig von der Flächenpressung) und die Klemmreibungszahl  $\nu$  als konstant angesetzt. Das führt zu einer Bernoullischen Differentialgleichung, deren Lösung den Kraftverlauf  $S(x)$  längs des Seiles mit der Bogenlänge  $x$  und der Krümmung  $r(x)$  angibt.

Der Unterschied zur Theorie der Seilreibung mit konstanter Umlenkreibungszahl zeigt sich besonders bei Betrachtung des Anspann- bzw. Nachmaßvorganges. Durch das sich dabei an der Anspannstelle bei  $x = 0$  ergebende Spannweg-Spannkraft-Diagramm kann die tatsächliche Veränderlichkeit der Umlenkreibungszahl  $\mu$  beurteilt und der Kraftverlauf  $S(x)$  längs des ganzen Seils bestimmt werden. Dem kommt bei der Überwachung von Spannvorgängen erhebliche praktische Bedeutung zu. Ein elektrisches Meß- und Registriergerät zur Aufnahme des Spannweg-Spannkraft-Diagramms befindet sich im Bau.

### Fachsitzung C: Strömungslehre

Vorsitz: J. Weissinger (Karlsruhe)

G. HÄMMERLIN (Karlsruhe): *Über die dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten.*

Im Jahre 1940 führte H. Görtler den Ansatz einer dreidimensionalen Instabilität zur theoretischen Behandlung des laminar-turbulenten Umschlags bei Grenzschichten inkompressibler Strömungen an gekrümmten Wänden ein. Der Ansatz führt auf ein mehrparametrisches Eigenwertproblem, wobei mit Hilfe der Eigenwerte das Verhalten einer Störung zu bestimmen ist. Von den damals gefundenen größenordnungsmäßigen Angaben über diesen Effekt weichen Ergebnisse von D. Meksyn stark ab, die 1950 veröffentlicht wurden.

Zunächst läßt sich exakt zeigen, daß die dreidimensionale Instabilität nur an konkaven Wänden auftritt. Weiterhin läßt sich eine strenge Lösung des Eigenwertproblems finden. Sie unterscheidet sich von den bisherigen und kann auf verschiedenen und unabhängigen Wegen gewonnen werden. Die Abweichung der Görtlerschen Approximation von dieser Lösung wird aufgeklärt. Damit liegt eine vollständige mathematische Theorie 1. Ordnung der dreidimensionalen Instabilität vor.

Da sich der physikalische Gültigkeitsbereich auch auf große Wellenlängen der Instabilität erstrecken soll, müssen hier noch Sonderbetrachtungen vorgenommen werden. Es ergibt sich, daß der kritische Parameter  $Re(\delta/R)^{1/2}$  neutraler Störungen ein Minimum für eine gewisse Wellenlänge besitzt.

H. WITTING (Math. Inst. d. Univ. Freiburg): *Über eine stationäre Instabilität der PRANDTL'schen Grenzschichtgleichungen.*

Die Lösungen der stationären Grenzschichtgleichungen werden auf den Einfluß kleiner Störungen des Einlaufprofils untersucht. Im Gegensatz zu den bisher in der Grenzschichttheorie untersuchten Instabilitätserscheinungen (Tollmien-Schlichtingsche Wellen, Görtler'sche Wirbel) handelt es sich also nicht um zeitlich angefachte Störungen, sondern um die stationäre Ausbildung von Störungen des Einlaufprofils oder irgend eines anderen Profils. Eine Grenzschichtströmung wird an einer Stelle stationär instabil genannt, wenn es in der Umgebung dieser Stelle in Strömungsrichtung lokal anwachsende Störungen gibt. Mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen wird gezeigt, daß dies genau dort der Fall ist, wo die substantielle Beschleunigung parallel zur Wand negativ ist; das ist bei Zugrundelegung der Wandbedingungen  $u = v = 0$  in der Nähe der Wand hinter der Stelle maximaler Wandschubspannung, am Rande der Grenzschicht hinter dem Druckminimum der Fall. Vermöge einer Umformung der Störungsgleichungen läßt sich diese Aussage auch bei Berücksichtigung der Randbedingungen beweisen. Die Gestalt dieser Störungen wird diskutiert. Auf den Einfluß dieser Instabilität und der bei Differenzenapproximationen vorgenommenen finiten Ersetzungen auf die Genauigkeit der numerischen Berechnung einer stationären Grenzschichtströmung wird eingegangen. Die Approximation von  $u_x$  durch den Quotienten vorwärts genommener Differenzen liefert im Stabilitätsbereich der Differentialgleichungen eine stabile Differenzengleichung, falls die Maschenweiten einer gewissen Beschränkung genügen.

W. FRANKE (Berlin): *Der durch eine vertikale Verdünnungswelle in der Atmosphäre erzeugte Verdichtungsstoß.*

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen (Kontinuitäts- und Eulersche Gleichungen) werden für den eindimensionalen, instationären, isentropen Fall auf die charakteristischen Richtungen umgeschrieben, um die Anwendung des Charakteristikenverfahrens zu ermöglichen. Nach diesem Verfahren wird die durch einen vorgegebenen Abwind erzeugte Verdünnungswelle unter Berücksichtigung der Schwerkraft berechnet und mit der entsprechenden, nicht der Schwerkraft unterworfenen Welle verglichen. Die Schwerkraft ruft eine beachtliche Beschleunigung der Strömung hervor, die zu Überschallgeschwindigkeiten führt. Es kommt zu einem Stoß, dessen Verlauf angegeben wird.

U. DOMM (Hermann Föttinger-Inst. Berlin-Charlottenburg): *Einige neue Ergebnisse aus der Theorie der Wirbelstraßen.*

Die Untersuchungen der letzten Jahre haben gezeigt, daß alle doppelt reihigen periodischen Wirbelstraßen instabil sind. Es existiert jedoch eine Klasse von Wirbelstraßen mit minimaler Instabilität, die den von v. Kármán angegebenen Straßentyp enthält. Die Zugehörigkeit zu dieser Klasse kann mit der Methode der kleinen Störungen festgestellt werden. Die Ausbildung von Wirbelstraßen hinter zylindrischen Körpern wurde unter Berücksichtigung der neuen theoretischen Resultate diskutiert.

Es wurden neue Ergebnisse über den Einfluß der Kompressibilität auf die Stabilität mitgeteilt. Ferner wurde über die Berechnung der Bahnbewegungen instabiler einreihiger Wirbelstraßen in Wandnähe berichtet. Das zuletzt genannte Problem steht im engen Zusammenhang mit dem Umschlag laminarer in turbulente Grenzschichten.



## Nachmittags

### Gemeinsame Sitzung: Forschungsberichte

Vorsitz: K. Marguerre (Darmstadt)

A. K. OPPENHEIM (Berkeley): *The Engineering Radiation Problem — an Example of the Interaction between Engineering and Mathematics.*

The engineering problem in radiation (as contrasted, say, to problems of interest to astrophysics) has to deal with interreflections introduced by the presence of walls — essential elements of any engineering system. The subject is presented as an example of the characteristic difficulties introduced by the complex geometry of the system — a problem of great importance to engineering practice and, for obvious reasons, often side-stepped in a conventional mathematical analysis. It appears that for the purpose of a numerical solution, the calculus formulation of the problem is inadequate, and that, in this respect, the network method is more suitable, as it has been indeed pointed out by von Mises in one of his last publications („On Network Methods in Conformal Mapping and in Related Problems“, U.S. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 18, 1952).

The lecture consists of a historical sketch of the problem; a review of the available analytical solutions obtained by direct accounting, in terms of integral equations, and by means of the network method. Finally, the treatment of such networks is described involving the use of combinatorial techniques, the development of which was recently spearheaded in connection with the availability of digital computers.

H. MÜNZNER (Inst. f. Math. Statistik und Wirtschaftsmath. d. Univ. Göttingen): *Die Ausgleichsrechnung im Lichte der neueren Statistik.*

Die klassische Ausgleichsrechnung ist in den letzten Jahrzehnten innerhalb der mathematischen Statistik in verschiedenen Richtungen weiterentwickelt worden, ohne daß die neuen Ergebnisse nennenswert über den Kreis der mathematischen Statistiker hinausgedrungen sind. Über die erzielten Fortschritte, die sowohl die Grundlagen als auch die praktische Anwendung betreffen, wird eine kurze Übersicht gegeben.

Die Bestimmung der „Bestwerte“ für die Parameter der ausgleichenden Funktion wird in der allgemeinen Schätztheorie wahrscheinlichkeitstheoretisch fundiert, die Genauigkeitsangaben für diese Werte durch die Intervallschätzung nach dem Confidenceschluß einwandfrei gelöst. Die gleiche Genauigkeitsbetrachtung wird für die einzelnen Funktionswerte der ausgleichenden Funktion angestellt. Ferner ist die Angabe von Confidencebereichen möglich, die die wahre, auszugleichende Funktion in ihrem ganzen Verlauf mit einer vorzuziehenden Wahrscheinlichkeit überdecken.

Den Voraussagen über das Auftreten erst in Zukunft zur Beobachtung gelangender Funktionswerte dienen die sogenannten Toleranzgrenzen. Zum Schluß wird auf statistische Tests eingegangen, die gestatten, zwischen zwei zur Ausgleichung herangezogener Funktionstypen (z. B. Gerade und Parabel zweiter Ordnung) eine Entscheidung zu treffen.

### Fachsitzung A: Angewandte Mathematik

Vorsitz: L. Collatz (Hamburg)

F. W. SCHÄFKE (Mainz): *Über die KAPTEYNschen Reihen nach BESSELFunktionen.*

Eine konsequente Auffassung der Kapteynschen Reihen als Reihen nach Eigenfunktionen eines geeigneten Problems führt neben vereinfachter Begründung bekannter Ergebnisse zu neuen Resultaten.

F. STALLMANN (Gießen): *Zur mathematischen Theorie des Elektrokardiogramms.*

Der arbeitende Herzmuskel erzeugt gewisse Aktionsströme, die als Potentialdifferenzen auf der Körperoberfläche in Erscheinung treten. Aufgabe der Elektrokardiographie ist es, aus diesen Potentialdifferenzen auf die Arbeit des Herzens, insbesondere bei krankhaften Veränderungen, zu schließen.

Die hier zugrunde liegenden mathematischen Probleme wurden bisher ausschließlich von Medizinern in naturgemäß primitivster Weise behandelt. Bei verfeinerten Untersuchungen traten zahlreiche Widersprüche auf. Angesichts dieser Tatsache erschien es dem Vortragenden reizvoll, diese Probleme mit angemessenen mathematischen Hilfsmitteln anzugreifen. Zu lösen war vor allem die zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie; dabei wurde versucht, die Körperoberfläche durch eine Kugel, einen Zylinder und einen Quader anzunähern. Weiter war nötig die Lösung linearer Gleichungssysteme, wobei Vorstellungen der Vektor- und Tensorrechnung eine große Rolle spielten. Zur Lösung wurden graphische und elektrische Methoden entwickelt. Die theoretischen Ergebnisse werden z. Zt. im physiologischen Institut der Medizinischen Akademie, Gießen, unter Leitung von Professor Blasius experimentell geprüft.

M. J. DE SCHWARZ (Rom): *Spannung und Stromstärke in einer Pupinleitung.*

Die Laplacetransformierten der an den Spulenklammern herrschenden Spannung und Stromstärke in einer Pupinleitung drücken sich nach L. Amerio mittels Summen von einer bestimmten Folge angehörigen meromorphen Funktionen aus. Es wird, und zwar im allgemeinen Falle einer nicht verlustfreien Leitung, die auch verteilte Induktivität besitzt, gezeigt, daß die Pole sämtlicher Funktionen der erwähnten Folge auf eine feste linke Halbebene beschränkt sind, und ihre Lage in derselben näherungsweise angeben. Daraus kann geschlossen werden, daß Spannung und Stromstärke als Funktionen der Zeit sich mittels der komplexen Umkehrformel berechnen lassen, welche Darstellung auch im Falle der unendlichen Leitung gültig bleibt. Im Falle einer endlichen Leitung ist auch die Darstellung in der üblichen Form einer durch gliedweise Übertragung der Partialbruchzerlegung entstehenden Reihe möglich.

Vorsitz: H. Unger (Darmstadt)

W. HAACKE (Braunschweig): *Zur iterativen Bestimmung der Rentabilität einer Zinsanleihe.*

Die Rentabilität einer Zinsanleihe wird im allgemeinen iterativ bestimmt. Dazu wird mit den Methoden der praktischen Analysis eine Konvergenzuntersuchung durchgeführt: Ist der Kurs über pari, so konvergiert das Verfahren, und zwar monoton. Ist der Kurs unter pari, so kann sich auch Divergenz ergeben. Hier werden Abschätzungen für die Rentabilität und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz gegeben.

VICTOR VON SECKENDORFF (Flensburg): *Logikkalkül und Elektroschaltung (Schaltalgebra).*

Durch eine mathematische Formel, die mehrere konstruktive Hilfsmittel verwendet, wird jeder als Schaltung mit Auf-Zu-Elementen (wie Kontakten, Ventilen usw.) auffaßbare technische, wirtschaftliche o.ä. Vorgang darstellbar (Ersatz der Zeichnung) und untersuchbar (nach Typen und Gesetzen).



häftigkeiten). Die Formel erlaubt Anwendungen und Verallgemeinerungen in reiner, überendlicher Mathematik. Von einem sog. *System* von Variablen  $x_m$  mit  $m$  in  $M$ , das als Teil eines Verbandes anzusehen ist, (formale) Durchschnitts- und Vereinigungsbildung zuläßt, und als logische Aussagen, Verbandselemente, Mengen, technische Schaltelemente u.ä. deutbar ist, werden *Elementarausdrücke* (dazu dual die *Unitarausdrücke*) gebildet: Durchschnitt der  $x_t$  über die  $t$  in  $T$  ( $T$  Teilmenge von  $M$ ) und der Verneinungen  $Nx_t$  über die restlichen  $t$  in  $M-T$ . Die Elementarausdrücke verhalten sich wie die Elemente eines Systems von Mengen  $X_m$  mit  $m$  in  $M$ . Sie erlauben das ausschließende Oder, die gewöhnlichen Anzahlausdrücke, die daraus verallgemeinerten Strukturausdrücke u.a.m. zu definieren. Schließt man aus dem System die Verneinungen seiner Elemente aus und deutet die Elemente als freie Auf-Zu-Elemente  $x_m$ , gebundene Auf-Zu-Elemente  $Kx_m$  oder Windungen  $Wl_mx_m$  (bzw.  $Wl_mNx_m$ ), die nach  $l_m$  Zeitelementen auf gewisse  $Kx_m$  oder deren Verneinungen  $KNx_m$  wirken oder keine Widerstände (Zeichengeber) sind, so hat man eine *Schaltung*. Eine *3-stellige Relation*  $v$  verbindet: 1. Schaltbetätigung oder logische Bewegung  $b$  ( $s$  = schließt,  $t$  = trennt,  $a$  = ausstehend (ob  $s$  oder  $t$ ),  $u$  = unmöglich), 2. Zeitelement des Schaltbeginnes  $k_1$ , 3. Zeitelement der Schaltstellung  $k_2$  ( $k_1$  und  $k_2$  aus der Folge  $K$  der Zeitelemente), 4. (Teile der) Schaltung  $y$ , 5. Schaltstellungen  $z$  dazu. Geeignete Axiome und *Hauptsätze* sichern Übersicht und Einblick in die Arbeitsweise der Relation, mit der Folgen von Schaltstellungen und Impulsgruppen definiert werden.

#### Fachsitzung B: Mechanik

Vorsitz: K. Magnus (Freiburg)

L. N. PERSEN (Trondheim): *Über den Zusammenhang der Schwingungsgleichung mit den dualen Integralgleichungen.*

G. SONNTAG (München): *Einfluß einer Nachgiebigkeit der Randeinpannung auf die Durchbiegung und Spannungen bei Platten großer Durchbiegung bzw. Membranen unter gleichmäßiger Belastung.*

Für die dünne Kreisplatte wird der Einfluß einer radialen Nachgiebigkeit des eingespannten Randes auf die Durchbiegung und Membranspannungen in strenger Lösung angegeben und die Biegebeanspruchung abgeschätzt. Für die quadratische Membran wurde bei festgehaltenen Ecken der Einfluß einer Nachgiebigkeit der Seiten (maximal in Seitenmitte) nach einem Näherungsverfahren berechnet. Der Einfluß einer geringen Randnachgiebigkeit (Bruchteile der Plattendicke) ist erheblich, die plausibel erscheinenden Ergebnisse werden kritisch verglichen.

H. ZIMMERMANN (Math. Inst. d. TU Berlin): *Anwendung der PFAFFschen Formen auf anholonome Systeme der Mechanik.*

Gegeben ist ein mechanisches System von  $N$  Freiheitsgraden mit  $m$  anholonomen Bedingungen. Ergänzt man diese Bedingungen durch  $N-m$  near unabhängige Pfaffsche Formen, so werden in jedem Raumpunkt  $N$  Richtungen bestimmt. In diesen Richtungen werden Pfaffsche Ableitungen an Stelle der Ableitungen nach den Koordinaten eingeführt. Die totalen Ableitungen des Potentials, der Lagrangeschen und der Hamiltonschen Funktion werden durch äußere Ableitungen ersetzt und die Geschwindigkeiten durch anholonome Geschwindigkeitsparameter. In diesen anholonomen Koordinaten werden die Lagrangeschen und Hamiltonschen Gleichungen des

Systems aufgestellt. Der *Hamilton-Jacobischen* Differentialgleichung entspricht ein abgeschlossenes Differentialgleichungssystem im *Cartanschen* Sinn.

Vorsitz: E. Mönch (München)

R. TROSTEL (Berlin): *Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern*

Es handelt sich um ein achsensymmetrisches Problem für zeitlich und örtlich beliebig veränderliche thermische Randwirkungen an den Mantelflächen. Einigen kurzen Ausführungen über die Bestimmung des Temperaturfeldes folgen die wesentlichen Gesichtspunkte für die Integration des zugehörigen, überall oberflächenspannungsfreien Spannungsfeldes. Abschließend einige Hinweise auf Näherungslösungen für den ebenen Fall, die das Ziel haben, die größtmögliche Anheizgeschwindigkeit zu bestimmen, die gerade noch ohne Überschreitung einer zulässigen Höchstspannung ertragen werden kann.

W. BADER (Berlin): *Zur Bestimmung der Wärmespannungen.*

Für das dem Verschiebungsfeld zugeordnete Potential, das nur von der Temperaturverteilung abhängig ist, können partikuläre Lösungen der Poissonschen Gleichung angegeben werden, wenn die Wärmeleitungsgleichung berücksichtigt wird. Das zur Erfüllung der Oberflächenbedingungen überlagerte Verschiebungsfeld wird mit einfachen Lösungsansätzen bestimmt. Die Rechnung wird auf ein Beispiel angewendet.

#### Fachsitzung D: Statistik

Vorsitz: K. Stange (Berlin)

F. BURKHARDT (Markkleeberg): *Über unverzerzte Schätzungen.*

Den Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung bildet die Funktion  $L(q, c, n, N)$  der Operationscharakteristik der Fabrikationskontrolle. Hierbei ist  $q$  die Quote der fehlerhaften Erzeugnisse des ganzen Loses und  $c, n, N$  sind die Parameter der Operationscharakteristik. Es entsteht das Problem nichtverzerzte Schätzungen für  $q$  und  $q(1-q)/n$  aus den Werten der Stichprobe aufzufinden. Das Problem wird als binomiales Stichprobenproblem behandelt.

P. LORENZ (Berlin): *Über die Verteilung der Mittelwerte von Stichproben.*

Wertung des Zentralen Grenzsatzes (Grenzwertsatzes) der Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Standpunkt des Praktikers der mathematischen Statistik. Beziehungen zwischen den Momenten der Ausgangsverteilung und den Momenten der Verteilung der Mittelwerte von Stichproben beliebigen Umfangs. Folgerungen.

E. ROSSOW (TU Berlin): *Eine einfache Näherung an die normal score*

Aus einer Normalverteilung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  sei eine Zufallsstichprobe von  $n$  Werten entnommen und die Beobachtungen  $x$  seien der Größe nach geordnet:  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Die mittlere zu erwartende Normalabweichung  $k_i$  des  $i$ -ten Wertes heißt der normal score. Die *Statistical Tables* von Fisher-Yates geben  $k_i$  auf zwei Dezimalen für  $n = 2 \dots (1) \dots 50$  und  $i = 1 \dots (n+1)/2$ .



Zur Ausdehnung des Tafelumfanges wurde heuristisch durch Umkehren der Anscombeschen Poissontransformation für  $i=1$  und lineares Abnehmen der errechneten Korrektur von  $i=1$  bis  $i=(n+1)/2$  eine Näherung entwickelt. Statt  $k_i$  wird näherungsweise die zugeordnete Normalwahrscheinlichkeit  $P_i$  bestimmt, wobei  $k_i$  und  $P_i$  verknüpft sind durch

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-k_i} \exp(-0,5x^2) dx \quad \dots (1)$$

Von den beiden entwickelten Näherungsformeln

$$P_i \approx (i-0,5)/n + (n+1-2i)/8(n-1) \quad \dots (2)$$

und

$$P_i \approx [i - \frac{3}{8} + \frac{3}{4}(i-1)/(n-1)]/(n+1) \quad \dots (3)$$

Ist für  $n$  unter etwa 20 die erste, für  $n$  über etwa 30 die zweite überlegen. Der Vergleich mit den Tafelwerten aus Fisher-Yates gibt für  $k_i$  bei  $n=30, 49, 50$  absolute Fehler von  $\approx 0,01$  und für  $k_1$  bei  $n=100, 200$  und  $1000$  aus den Pearson-Hartleyschen Tafeln einen absoluten Fehler von unter  $0,015$ , sodaß zusammen mit der Tatsache, daß die Näherung für ungerades  $n$  bei  $i=(n+1)/2$  korrekt ist, die Vermutung begründet ist, daß sie zu ziemlich weitgehender Extrapolation der Tafeln mit technischer Genauigkeit benutzt werden darf. Eine weitergehende Anpassung durch exaktes Festlegen von  $P_1$  und  $P_{0,5(n+1)}$  über die Pearson-Hartleyschen Tafeln wurde noch nicht versucht.

Vorsitz: H. Münzner (Göttingen)

K. VOELZ (Hannover): *Anwendung der Statistik bei der Reifenerprobung.*

Die häufig unbekannte oder auch nicht ausreichende Korrelation zwischen Prüfstandsmessung und der Bewährung eines technischen Produktes (z.B. eines Reifens) beim Kunden erfordert statistische Untersuchungen über die Qualität direkt beim Kunden.

Ein einfaches, aber nicht in allen Fällen brauchbares Mittel, den Qualitätsstand durch eine Zahl zu kennzeichnen, ist die Zählung der Reklamationen. Es wird über Fälle berichtet, in denen die Reklamationen nach einer Gaußschen Häufigkeitsverteilung über dem Logarithmus der Zeit beim Hersteller eintreffen. Sind die Parameter dieser Häufigkeitsverteilungen aus älteren Aufzeichnungen her bekannt, so kann schon nach dem Eintreffen der ersten Reklamationen der gesamte Umfang abgeschätzt werden.

Auch bei der Feststellung der erzielten Kilometerleistungen von Reifen beim Kunden werden dem Hersteller zunächst vorwiegend niedrige Leistungen bekannt, so daß der aus allen Reifenleistungen errechnete Mittelwert dauernd ansteigt. Faßt man die Logarithmen der Kilometerleistungen und der Laufzeiten als eine zweidimensionale Gaußsche Häufigkeitsverteilung auf, so gelingt es, den endgültigen Mittelwert abzuschätzen, noch ehe alle Leistungen bekannt sind.

R. WARTMANN (Verein Deutscher Eisenhüttenleute, Düsseldorf): *Entwicklung und Anwendung der mathematisch-technischen Statistik im deutschen Eisenhüttenwesen.*

Im deutschen Eisenhüttenwesen sind bei der Einführung der technischen Statistik andere Wege beschritten worden als bei der Fertigungsindustrie.

Während bei letzterer die Qualitätskontrolle (Kontrollkarten, Stichprobenpläne u. ä.) im Vordergrund steht, ist bei der Eisenhüttenindustrie hauptsächlich das Interesse auf die Durchleuchtung großtechnischer Vorgänge gerichtet. Damit ergibt sich zwangsläufig, daß die Korrelationsrechnung bzw. ganz allgemein die Einflußgrößenrechnung von überwiegender Bedeutung ist. An einer Reihe von Beispielen wurde der praktische Einsatz dieser Methoden auf technologische, betriebswirtschaftliche und andere Probleme aufgezeigt. Schließlich zeigte eine Reihe von weiteren Beispielen, in welcher Weise speziellere Methoden (u. a. auch Kontrollkarten) zum Einsatz kamen.

Es wurde auf die hohen wirtschaftlichen Erfolge hingewiesen, die mit diesen Methoden erzielt worden sind.

*K. STANGE (TU Berlin): Zur Ermittlung der Abgangslinie für wirtschaftliche und technische Gesamtheiten mit Hilfe des Lebensdauernetzes.*

Die bei der Untersuchung von Abgangslinien benutzten rechnerischen Ausgleichsverfahren (Pearson-Typen, Gram-Charlier-Reihe, Gompertz, Makeham-Formel) erfordern viel Rechenaufwand. Sie versagen, wenn die Beobachtungen nicht über die gesamte Lebensdauer verteilt sind, weil dann die zum Ausgleichen notwendigen Momente nicht zur Verfügung stehen. Im Ganzen besteht zwischen Aufwand und Erfolg kein sinnvolles Verhältnis.

Praktisch brauchbar sind allein zeichnerische Verfahren. Die bekannte Normalverteilung für die Abgangsdichte oder Merkmalstransformation auf nahezu normale Form) führen bei der Untersuchung von Grundgesamtheiten aus Technik und Wirtschaft nur in Sonderfällen zum Ziel.

Setzt man für den zeitlichen Verlauf der jeweiligen Abgangsdichte eine in geeigneter Weise normierte Potenzfunktion an, so gewinnt man eine zweiparametrische Schar von Abgangslinien mit der Gleichung

$$F(t) = 1/\exp(t/T))^{\alpha}.$$

Es bedeutet  $F(t)$  die im Zeitpunkt  $t$  noch vorhandene relative Anzahl der zur Zeit  $t = 0$  in Gang gesetzten Elemente;  $T$  ist eine kennzeichnende Lebensdauer und  $\alpha$  ein Exponent, der die Schnelligkeit des Abgangs kennzeichnet. Alle diese Abgangslinien lassen sich in einem geeigneten Netz — dem Lebensdauernetz — zu geraden Linien strecken. Diese Tatsache erleichtert die Ermittlung der kennzeichnenden Parameter aus den Beobachtungen ganz wesentlich.

Der Zerfall nichtbeständiger Elemente läßt sich als Sonderfall in die hier gegebenen Lebensdaueruntersuchungen einordnen. Zahlreiche Beispiele aus den verschiedensten Gebieten der Technik und Wirtschaft bestätigen die Brauchbarkeit des Ansatzes. [Die Arbeit erscheint ausführlich in Mitteilungsblatt für mathematische Statistik, Heft 2, 1955.]

*E. J. GUMBEL (Berlin): Statistische Theorie der Ermüdungserscheinungen von Metallen.*



Vormittags

Nach der ordentlichen Hauptversammlung der GAMM folgten Referate über Ausbildung und Stellenvermittlung der Diplom-Mathematiker. [Ein Bericht über diese Veranstaltung wird wie im Vorjahre beim Physik-Verlag, Mosbach, gesondert erscheinen.] Der Vormittag schloß mit einer gemeinsamen wissenschaftlichen Sitzung ab.

*Gemeinsame Sitzung: Forschungsberichte*

Vorsitz: W. Haack (Berlin)

A. A. WALTHER (Darmstadt): *Der Darmstädter programmgesteuerte elektronische Rechenautomat.*

Aufbau - Zahlendarstellung - Befehlsliste - Adressenrechenwerk - Sonderprogramme - Lochkartenmaschine zur Eingabe und Auslieferung - Zeitvergleiche.

N. J. LEHMANN (Dresden): *Der Bau eines kleinen Rechenautomaten an der Technischen Hochschule Dresden.*

H. BILLING (Göttingen): *Der Stand der Rechenmaschinenentwicklung in Göttingen.*

Die Arbeitsgruppe Numerische Rechenmaschine hat bisher 2 elektronische Rechenmaschinen fertiggestellt und 2 weitere Typen in Entwicklung.

Die G 1 leistet bereits seit Herbst 1952 im Durchschnitt täglich 19 Stunden produktive Arbeit. Arbeitsgeschwindigkeit etwa 3 Operationen/sec. Programmsteuerung von Lochbändern her. Trommelspeicher für 26 Zahlen zu je 10 Ziffern.

Die G 1a soll Ende 1955 fertiggestellt und industriell nachgebaut werden. Arbeitsgeschwindigkeit etwa 20 Operationen/sec. Programmsteuerung von 10 photoelektrisch ablesbaren Lochbändern aus. Trommelspeicher für 800 Zahlen. Rechnung mit festem oder beweglichem Komma.

Die G 2 ist Dezember 1954 fertiggestellt. Arbeitsgeschwindigkeit etwa 30 Operationen/sec. Programmsteuerung vom Trommelspeicher her. Trommelspeicher für 2048 Zahlen zu je 50 Dualziffern bzw. 4096 Kommandos. Rechnung mit festem Komma, doch spezielle Befehle, die Rechnung mit beweglichem Komma erleichtern. Besondere Maßnahmen erleichtern die Verwendung von Lochbandbibliotheken, in denen häufiger gebrauchte Rechengänge aufgehoben werden.

Die G 3 wird erst in einigen Jahren fertiggestellt sein. Es soll eine sehr schnelle Maschine (etwa 5000 Operationen/sec.) mit Matrixspeichern aus Ferritkernen werden.

E. TREFFTZ (Göttingen): *Programmierung und Anwendung der Rechenmaschinen G 1 und G 2.*

Für die bandgesteuerten Rechenmaschinen G 1 und G 1a wird Programmierung und Wirkungsweise an Hand der Befehlsliste erläutert.

## Nachmittags

### Gemeinsame Sitzung: Forschungsberichte

Vorsitz: C. Schmieden (Darmstadt)

E. J. NYSTRÖM (Helsinki): *Anschauliche Abbildung.*

Forderungen an Maßgerechtigkeit und gleichzeitiger Anschaulichkeit einer Abbildung lassen sich weitgehend befriedigen durch nunmehr zur Verfügung stehende einfache, graphische und instrumentelle Methoden.

W. KUCHARSKI (Berlin): *Über ebene Bewegungen des Idealeils.*

Erwähnung bekannter Lösungen; Hinweis auf einige charakteristische Ergebnisse des Stoßproblems. Bericht über angenäherte Lösungen aus zwei Aufgabenkreisen: (a) Seilform annähernd geradlinig; beliebige Tangentialgeschwindigkeit. Hiermit u. a. Verallgemeinerung eines ursprünglich von Hamel gelösten Problems. (b) Seilform annähernd kreisförmig; Seil in sich geschlossen, mit großer, vorgeschriebener Tangentialgeschwindigkeit umlaufend. Eingeprägte Normal- und Tangentialkräfte, die entweder im Raume fest sind oder mit dem Seil umlaufen. Hiermit Einblick z. B. in die Vorgänge bei einem mit großer Umfangsgeschwindigkeit auf dem Bodenrollenden Kettenring, sowie in die Möglichkeit der Bildung von umlaufenden Seilringen und deren Bewegung von außen her (Lasso oder dgl.). Ferner eine exakte Lösung für relativ stationäre Seilformen in einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen festen Punkt rotierenden Ebene. Herstellung dieser Lösung entweder aus den Bewegungsgleichungen oder aus dem entsprechenden Variationsproblem; vollständige Durchführung mit elliptischen Funktionen.

K. MARGUERRE (Darmstadt): *Anwendung von Matrizen bei Schwingungs- und Stabilitätsproblemen.*

Am Beispiel des Knickstabes wird eine Matrizenmethode entwickelt, die es erlaubt, in übersichtlicher Weise Eigenwertprobleme für vielfeldrige Gebilde zu lösen. Die Übergangsbedingungen zwischen den Feldern werden durch das Schema der Matrizen-Multiplikation von selbst erfüllt, und die Eigenwertgleichung ergibt sich als Null-Bedingung für eine Unterdeterminante der Produkt-Matrix von der Ordnung  $n/2$ , wenn  $n$  die Ordnung der Differentialgleichung ist. Elastische Zwischenstützen, elastische Gelenke usw. können ohne weiteres in das Schema eingeordnet werden. Eine prinzipielle Schwierigkeit, die im Grenzfall starrer Stützen oder loser Gelenke entsteht, läßt sich durch Einführung von „Determinanten-Matrizen“ überwinden (H. Fuhrke). Das Verfahren ist in den letzten Jahren von H. Fuhrke auf Schwingungsprobleme von Balken und Rahmen (auch erzwungene Schwingungen), von W. Schnell auf Krafteinleitungsprobleme (Randwertprobleme) von Schalen und auf Stabilitätsprobleme von Platten und Schalen angewendet worden.

### Fachsitzung B: Mechanik

Vorsitz: K. Strubecker (Karlsruhe)

W. SCHNELL (Inst. f. Techn. Mech. d. TH Darmstadt): *Berechnung des Längskraftverlaufs in versteiften Zylinderschalen mit Hilfe der Matrizenmethode.*

Der Abklingverlauf einer am Rand eingeleiteten Längskraftgruppe wird in einer vereinfachten Theorie der orthotropen Schale (Längsbiege- und



(Brillsteifigkeit vernachlässigt) mit Hilfe der Matrizenmethode untersucht, deren Grundgedanke Prof. Marguerre in seinem Forschungsbericht vorgezogen hat. Die Einführung von „Determinantenmatrizen“ ermöglicht eine geschlossene Darstellung auch bei beliebiger Gliederung der Schale in Längsrichtung, wobei insbesondere starre Spante berücksichtigt werden können. Eine zusätzliche Vereinfachung in den Matrizen (Umfangsbiegesteifigkeit der Haut klein gegen die Spantbiegesteifigkeit) bringt den Übergang zur Differenzengleichung (Schubfeldschema). Aus dem Vergleich der Ergebnisse nach den drei Lösungsmethoden (orthotrope Rechnung — Differenzengleichung — Matrizen) werden Grenzen für die Gültigkeit der vereinfachenden Annahmen gewonnen.

[Eine ausführliche Darstellung der Methode erscheint in Z. FLUGWISS., voraussichtlich Ende 55.]

K. H. KOCH (Hannover): *Lösung des Biegeproblems allgemeiner Rotationsschalen durch Matrizenfunktionen.*

Das bisher noch ungelöste Problem, den Spannungs- und Formänderungszustand einer allgemeinen Rotationsschale mit rotationssymmetrischer Belastung und Stützung, aber beliebig veränderlicher Wandstärke zu bestimmen, wird durch Umformung in ein Matrizenproblem erledigt. Die Lösung läßt sich durch einige geeignet definierte Matrizenfunktionen darstellen, die ihrer numerischen Berechnung gut zugänglich sind. Diese Berechnung ergibt nach einem Näherungsverfahren, dessen Genauigkeit beliebig gesteigert und dessen Fehler abgeschätzt werden kann.

E. BEHLENDORFF (Math. Inst. d. TU Berlin): *Über Randwertprobleme bei Häuten und dünnen Schalen im Membranspannungszustand.*

Es wird der momentlose Spannungszustand einer beliebig gekrümmten Haut bzw. dünnen Schale betrachtet, die durch äußere Flächenkräfte belastet wird. Längs des Randes sei die Größe der Schubspannung vorgegeben. Untersucht wird nun, wieweit Flächenkräfte und Schubspannung am Rande beliebig vorgegeben werden können, so daß sich die Schale dabei im elastischen Gleichgewicht befindet. Diese Frage führt mathematisch auf die Untersuchung der Lösbarkeit eines linearen elliptischen Differentialgleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen mit Randbedingungen. Die Anwendung der von Haack-Hellwig entwickelten Methoden auf dieses Randwertproblem liefert drei notwendige Integralbedingungen für Flächenkräfte und Randschubspannung. Die Existenz einer Lösung dieses mechanischen Problems läßt sich zurückführen auf das folgende rein geometrische Problem: Bestimmung aller infinitesimalen Verbiegungen der Membranfläche, bei denen die Projektion des Verschiebungsvektors der Randpunkte auf die Tangentialebene die Randkurve berührt. Sind diese Verbiegungen bekannt, dann ist die Existenz des mechanischen Problems allein durch Quadraturen bestimmt. Die erhaltenen Ergebnisse werden auf Kugelschalen angewendet.

### Fachsitzung C: Strömungslehre

Vorsitz: R. Wille (Berlin)

H. STEFANIAK (Labor f. Strömungsmech. d. TH München): *Über einige rotationäre Flüssigkeitsbewegungen, welche der Bedingung*

$$\int (E_{Kin} + k \cdot E_{Dissip}) \cdot dt = \text{Extremum}$$

genügen.

Versuchsweise wird das *Euler-Maupertuische* Minimalprinzip um einen Ausdruck erweitert, der die Wirkung der Energiedissipation enthält. Es ergeben sich für die untersuchten einfachen Fälle allgemeine Lösungen, deren charakteristische Funktionen die *Prandtl'schen* Grenzschichtgleichungen für den runden und ebenen laminaren und turbulenten Strahl voll befriedigen; auch der Fall der asymptotischen ebenen und rotationssymmetrischen Absaugung ist darin enthalten.

O. EMERSLEBEN (Univ. Greifswald): *Ergebnis der verfeinerten Neuberechnung einer bei Parallelströmungen zäher Flüssigkeiten auftretenden verallgemeinerten Zetafunktion.*

In einer Veröffentlichung über das Darcysche Filtergesetz [PHYS. Z. 20 601—610, 1925] hat der Vortragende numerische Werte der Funktion

$$Z \left| \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{smallmatrix} \right| (2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(kx + ly)}{k^2 + l^2} \dots (1)$$

(nach wachsendem Nenner zu summieren)

mitgeteilt, die zur Darstellung einer Parallelströmung zäher Flüssigkeiten geeignet ist, wenn regelmäßig (periodisch) verteilte Strömungswiderstände das Strömungsbett begrenzen.

Wie auf der vorjährigen GAMM-Tagung in Aussicht gestellt [PHY. VERH. 5, 16—17, 1954 und Z. ANGEW. MATH. MECH. 35, 156—160, 1955] wurden diese Berechnungen verfeinert: Für alle Punkte des Symmetriedreiecks  $0 \leq x \leq y \leq 1/2$ , deren Koordinaten Vielfache von  $1/48$  sind, auf Dezimalstellen. Eine im Kreis  $x^2 + y^2 < 1$  sehr gut konvergente Reihenentwicklung hierfür, deren erste Glieder bereits genügen, um das Verhalten um den singulären Punkt  $x = y = 0$  (in dem sich die numerischen Einzelwerte schwierig interpolieren lassen) genau wiederzugeben, beginnt

$$Z \left| \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{smallmatrix} \right| (2) = \left. \begin{aligned} & -\pi \log(x^2 + y^2) + c_0 + \pi^2(x^2 + y^2) \\ & + c_4[(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2] \\ & + c_8\{(x^2 - y^2)^2[(x^2 + y^2)^2 - 28x^2y^2] + 16x^4y^4\} + \dots \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

mit  $c_0 = -8,2343212$ ,  $c_4 = 4,950$  und  $c_8 = 3,3$ .

Eine ähnliche Entwicklung, jedoch ohne das logarithmische Glied, läßt sich um den Punkt  $1/2, 1/2$  aufstellen, also für

$$Z \left| \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 - x & 1/2 - y \end{smallmatrix} \right| (2) = c_0 + \pi^2(x^2 + y^2) + c_4[(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2] + c_8\{\dots\} + \dots \dots (3)$$

mit  $c_0 = -\pi \log 2$ ,  $c_4 = -5c_1$  und  $c_8 = 15c_3 = 49,9$  und demselben Polynom in der geschweiften Klammer wie oben.

W. KOCHANOWSKY (MPI f. Strömungsforsch., Göttingen): *Die Brauchbarkeit der REYNOLDSSchen Theorie der Schmiermittelreibung für die Berechnung des Ölbedarfs eines Gleitlagers.*

Für den Ölbedarf eines zylindrischen Gleitlagers ist die an den Lagerenden ausfließende Ölmenge maßgebend. Die Integration der bisher in der Theorie der Schmiermittelreibung fast ausschließlich verwandten Reynoldsschen Gleichung — z. B. nach Bauer, Vogelpohl oder Sassenfeld-Walther — liefert für den Grenzübergang bei sehr großen Belastungen einen gegen



Null gehenden Wert der seitlich ausfließenden Ölmenge, während sich nach *Glück* und *Fränkel* bei einer Modifizierung der *Reynoldsschen* Gleichung in endlicher Wert hierfür ergibt. In Anlehnung an eine Arbeit von *H. Reissner* wurden zur Nachprüfung dieses Widerspruchs die *Navier-Stokes*-schen Gleichungen selbst durch Reihenentwicklungen integriert. Es zeigte sich, daß auch hiernach die seitlich ausfließende Ölmenge mit wachsender Exzentrizität des Zapfens in der Schale zunächst zunimmt, um nach Erreichung eines Maximums im Grenzfall sehr großer Exzentrizität wieder auf den Wert Null abzufallen. Damit scheint die Brauchbarkeit der *Reynoldsschen* Theorie auch für die Ermittlung des Ölbedarfs im Lager nachgewiesen zu sein.

### *Fachsitzung E: Rechenmaschinen*

Vorsitz: *A. Walther* (Darmstadt)

*F. W. GUNDLACH* (Berlin): *Über ein neues Verfahren zur trägheitslosen Multiplikation in elektronischen Analogie-Rechenanlagen.*

Die bisher bekannten Verfahren zur Multiplikation in elektronischen Analogie-Rechenanlagen weisen erhebliche Nachteile auf, da sie entweder nicht genügend trägheitsfrei oder nicht genügend genau sind. Es wurde aus diesem Grund ein neues Verfahren entwickelt, das sich einer besonders konstruierten Elektronenstrahlröhre bedient. Diese Röhre besitzt 2 ebene Ablenkplattenpaare üblicher Ausführung und zwischen ihnen ein Ablenksystem, dessen 4 Platten in ihrem Querschnitt die Gestalt von Ästen einer gleichseitigen Hyperbel besitzen und überkreuz miteinander elektrisch verbunden sind. Durch eine elektronische Regelstrecke wird die Spannung am weiten ebenen Elektrodensystem derart gesteuert, daß der Elektronenstrahl stets in seine Nullstellung zurückgeführt wird. Dann ist bei ideal arbeitender Rückstellung die Spannung am letzten Plattenpaar dem Produkt aus den Spannungen an den beiden vorderen Plattenpaaren proportional. Die mit dieser Röhre erreichten Ergebnisse werden erläutert; das Verfahren wird an der in Darmstadt im Aufbau befindlichen repetierenden elektronischen Analogie-Rechenanlage angewendet.

*W. DHEN* (Inst. f. Fernmeldetechn. d. TH Darmstadt): *Bericht über die Entwicklung einer repetierenden elektronischen Analogie-Rechenanlage zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.*

In Darmstadt wurde 1953 mit der Entwicklung einer repetierenden elektronischen Analogie-Rechenanlage zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen begonnen. Die Anlage enthält voll elektronisch arbeitende Rechengeräte zum Integrieren, Addieren, Multiplizieren und Dividieren, sowie Geräte zur Erzeugung beliebiger Funktionen. Alle abhängigen Rechengrößen werden durch stetig sich ändernde elektrische Spannungen dargestellt; die unabhängige Veränderliche ist die Zeit. Durch Verkopplung der Rechengeräte verschafft man sich ein elektrisches Modell der zu lösenden Differentialgleichung. Der Lösungsvorgang läuft in 1/50 Sekunde ab und wird 25mal je Sekunde wiederholt, sodaß die Lösung als stehende Nachleuchtcurve auf dem Schirm einer *Braunschen* Röhre ausgewertet werden kann. Infolge der schnellen periodischen Wiederholung läßt sich der Einfluß von Parametern auf den Lösungsverlauf unmittelbar verfolgen. Daher ist die Anlage besonders zur Bearbeitung von Anfangs- und Randwertproblemen geeignet. Der Fehler der einzelnen Rechengeräte liegt unter 1%.

Zur trägheitsfreien Multiplikation wurde ein Verfahren entwickelt, in dem eine neue Elektronenstrahlröhre mit speziellen elektrischen Ablenkssystemen Verwendung findet. Die Anlage enthält im endgültigen Aufbau, derzeit in Angriff genommen wird, etwa 500 Elektronenröhren.

A. BAEUMLER (ZUSE K.-G., Neukirchen, Kr. Hünfeld): *Die besonderen Eigenschaften des kleinen programmgesteuerten Rechengerätes Z 11.*

Angeregt durch die Entwicklung eines Spezialgerätes für Zwecke der Flurbereinigung durch Herrn Regierungsrat Seifers in München wurde ein programmgesteuertes Spezial-Rechengerät auf Relais-Basis entwickelt. Die Programmierung wird auf Schrittschaltern fest verdrahtet. Dieses preisgünstige Gerät ist somit für Aufgabengebiete, in denen ständig nach den gleichen Formeln gerechnet wird, vorgesehen und kann im Vermessungswesen, in der Optik, im Versicherungswesen und in zahlreichen anderen Gebieten eingesetzt werden. Die Bedienung ist einfach und kann von Schreibkräften durchgeführt werden.

Das Rechengerät Z 11 arbeitet im reinen Dual-System mit festem Komma. Der Stellenbereich beträgt 8 Dezimalstellen, teilweise kann mit doppelter Zahlenlänge gerechnet werden. Es sind 10 bis 30 Speicherzellen vorhanden, jedoch kann ein Lochstreifenwerk als zusätzliche Speichermöglichkeit eingebaut werden. Es werden durchschnittlich 2 bis 3 Operationen in der Sekunde gerechnet. Die Programme können praktisch beliebige Längen haben. Programmteile können zyklisch sein und auch Übersprünge werten. Die Beendigungen der Zyklen und die Sprünge können vom Vorzeichen beliebiger Werte, von Lochstreifensteuernkombinationen oder von Entscheidungen des Rechners abhängig gemacht werden.

Das Gerät wird bisher in der Flurbereinigung und Landesvermessung für Schnittpunktrechnungen, Koordinatentransformationen, Flächenrechnungen, Winkelumwandlungen (Alt- in Neugrad) usw. und in der Optik für trigonometrische Strahlrechnungen durch optische Systeme eingesetzt.

F. R. GÜNTSCH (Math. Inst. d. TU Berlin): *Ein magnetbandgesteuertes digitales Kleinrechengerät.*

Es soll im folgenden ein Rechenautomat beschrieben werden, der in der Lage ist, folgende Aufgabe zu lösen: Das Auswertegerät eines Kinnor-Theodoliten liefert alle sechs Sekunden 20 Meßergebnisse. Der Automat soll nun in den sechs Sekunden Zwischenzeit jedesmal nach der gleichen Formel aus diesen Meßergebnissen bestimmte Größen berechnen und ausdrucken. Das Gerät soll jedoch so flexibel bleiben, daß man durch Einlegen eines anderen Programmes auch mit anderen Ausgangswerten nach anderen Formeln verfahren kann. Dabei ist der Verwendungsbereich des Automaten durch die Größenordnung seines Speichers begrenzt.

Der Automat arbeitet dual in Serie mit 25 Stellen. Er hat einen Ferrit-Matrix-Speicher für etwa 30 Zahlen und arbeitet mit einer Rechenfrequenz von 50 kHz. Programm und Operationssteuerung sind auf einem endlos einspurigen Magnetband mit schleifendem Lesekopf (100 Impulse/min, 50 cm/sec Bandgeschwindigkeit) notiert, und zwar in der Weise, daß immer abwechselnd ein Befehl und eine zur Ausführung des Befehls wichtige Information (je 25 Impulse) auf dem Band folgen. Der Befehl wird in ein Befehlsregister gelesen. Fünf Dualstellen des Befehls werden zur Speicherwahl benötigt, eine Dualstelle entscheidet, ob der betreffende Befehl bedingt (durch den Inhalt eines bestimmten Registers) oder unbedingt ausgeführt werden soll. Die restlichen Dualstellen des Befehls betätigen direkt

die Schalter. In der darauffolgenden Wortzeit wird der gelesene Befehl ausgeführt. Befehl-lesen und -ausführen folgen so immer abwechselnd. Zusammengesetzte Befehle, die mehr als eine Wortzeit benötigen (Multiplikation), müssen programmiert werden. Die Programmimpulse synchronisieren gleichzeitig den Rechenablauf. Das Auswechseln eines Programmbandes ist sehr einfach, dagegen ist die Aufstellung eines neuen Programmes mühsam. Die Ausgabe der Resultate erfolgt auf einer 15 Dezimalstellen umfassenden Tabelliermaschine. Die Eingabe geschieht durch Eintasten von Hand oder durch Impulsserien, die einem Analog-Digital-Wandler entstammen, oder auch in beiden Arten gemischt.

SONNABEND, DER 4. JUNI 1955

Vormittags

Gemeinsame Sitzung: Forschungsberichte

Vorsitz: L. Cremer (Berlin)

A. A. PFLÜGER (Hannover): *Nicht-lineare Beulprobleme.*

Bei der üblichen Lösung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik pflegt man in doppelter Hinsicht zu linearisieren: Erstens bei der Berechnung des bis zum kritischen Punkt gültigen Grundzustandes, zweitens beim Ansatz der im kritischen Punkt möglichen Zusatzverschiebungen. Will man über diese Näherung hinausgehen, so kann man die Rechnung sowohl im überkritischen als auch im unterkritischen Bereich verfeinern. Das erstere ist bereits verschiedentlich geschehen. Eine bessere Erforschung des unterkritischen Grundzustandes lohnt sich jedoch ebenfalls und liefert vor allem bei Flächenträgern neue Erkenntnisse. Es können nicht nur erhebliche Korrekturen der Eigenwerte sondern auch völlig neue Verzweigungspunkte des Gleichgewichts auftreten, die bei Linearisierung des Grundzustandes verschwinden. Derartige „nicht-lineare“ Beulprobleme werden am Beispiel einer verwundenen Rechteckplatte erläutert.

R. GRAN OLSSON (TH Trondheim): *Beziehungen zwischen klassischer Hydrodynamik und neuzeitlicher Erdbaumechanik insbesondere in der Theorie der Setzung von Tonschichten.*

Drei Grundtatsachen dienen zur Aufstellung der Differentialgleichung der Porenwasserströmung, nämlich die Beziehung zwischen Porenzahl  $e$  und Korndruck  $p$  ausgedrückt durch die Verdichtungszahl  $\alpha = \Delta e / \Delta p$ ; zweitens durch die Kontinuitätsgleichung  $\Delta n = \partial v / \partial x \Delta t$ , wo  $n$  das Porenvolumen,  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit,  $x$  die Strömungsrichtung und  $t$  die Zeit bedeuten; drittens durch das Gesetz von Darcy:

$$v = K / \eta (\partial p / \partial x + \gamma_w),$$

wo  $K$  die Durchlässigkeit,  $\eta$  die Zähigkeit des Wassers und  $\gamma_w$  dessen spezifisches Gewicht bezeichnen. Mit  $dp = -du$  ( $u$  = Porenwasserdruck) ergibt sich die Gleichung

$$\partial u / \partial t = c \partial^2 u / \partial x^2, \quad \text{wo } c = K(1+e) / \eta \alpha.$$



Berücksichtigt man das Trägheitsglied, ergibt sich an Stelle des Darcyschen Gesetzes:

$$v = -K/\eta(\partial u/\partial x + \rho_w \partial v/\partial t),$$

womit sich ein System simultaner Gleichungen ergibt, die den Kabelgleichungen von Kirchhoff entsprechen. Es ergibt sich eine vollständige Analogie zwischen den Gleichungen der Erdbaumechanik und denen der Elektrodynamik, während man auf Grund des Gesetzes von Darcy eine Analogie zur Gleichung der Wärmeleitung erhält. Die erweiterte Gleichung der Porenwasserströmung wird mit denselben Methoden wie bei der Telegraphengleichung gelöst (Riemannsche Integrationsmethode, Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation usw.) — Die Gleichung der Sedimentation wird für eine konstante Ablagerung der Masse je Zeiteinheit streng gelöst. Bei veränderlicher Ablagerung werden Lösungen durch die unvollständige Gammafunktion, das Fehlerintegral sowie das Exponentialintegral angegeben.

### Fachsitzung A: Angewandte Mathematik

Vorsitz: H. Heinrich (Dresden)

J. SCHRÖDER (Math. Inst. d. TH Hannover): Über das Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben.

Das Differenzenverfahren führt bei der ersten Randwertaufgabe für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf ein System von im allgemeinen nichtlinearen Gleichungen. Es wird ein Iterationsverfahren zur Lösung dieser Gleichungen beschrieben, Konvergenzbedingungen und Fehlerabschätzungen für dieses Verfahren werden angegeben. Außerdem werden die Fehler der mit dem Differenzenverfahren berechneten Näherungswerte gegenüber der genauen Lösung der Randwertaufgabe abgeschätzt. Oft kann man Aussagen über das Vorzeichen der Fehler machen. Die Ergebnisse lassen sich zum großen Teil auf Sturmsche Randbedingungen und die Randbedingungen der Periodizität übertragen.

### I. PAASCHE (München): Ein Äquivalenzsatz für Summengleichungen.

Unendliche lineare Gleichungssysteme wurden häufig nur für zeilenweise quadratisch konvergente, also absolut kleine Koeffizienten und ebensolche Komponenten der Lösungsvektoren betrachtet (Hilbertraum). Im Gegensatz dazu wird ein Satz über äquivalente Systeme bewiesen, das ein Wachstum der Koeffizienten sowohl in Zeilen- wie in Diagonalenrichtung gestattet. Äquivalent heißen dabei zwei Gleichungssysteme, die dieselben Lösungen und Wachstumsbedingungen für die Koeffizienten aufweisen. Etwa vorhandene Lösungen werden einmal absolut klein, d. h. von ähnlichem infinitären Charakter wie die konstante rechte Seite vorausgesetzt. Umgekehrt sind bei absolut kleinen Koeffizienten der linken Seite Lösungen und rechte Seite mit einem Wachstum von Potenzcharakter zulässig. Der Satz verallgemeinert eine Äquivalenzbeziehung von Perron, die nur zeilenweise gegen Null konvergierende Koeffizienten zuläßt.

H. WITTMAYER (Svenska Aeroplan AB (SAAB) Linköping): Einfach angenäherte Berechnung der Biegeeigenfrequenzen eines einseitig eingespannten Stabes ungleichförmigen Querschnittes, sowie der Eigenwerte ähnlicher Variationsprobleme.

In dem zweigliedrigen Variationsausdruck (8) der Arbeit des Verfassers im Ingenieurarchiv 1952 über die Berechnung von Torsionseigenfrequenzen

wird zur Verallgemeinerung die erste Ableitung durch die  $n$ -te ersetzt. Dieser Variationsausdruck wird auf die kanonische Form gebracht und in eine einfache Form transformiert. Das transformierte Problem wird durch ein einfacheres mit konstanten Koeffizienten und nur einem freien Parameter ersetzt. Dieser wird dann mit Hilfe der Störungsrechnung so bestimmt, daß die Eigenwerte des Ersatzproblems möglichst gute Näherungswerte der des gegebenen Problems sind. Hierzu braucht man für  $n = 1$  (Torsionsschwingung) nur eine charakteristische Funktion zu betrachten, jedoch für  $n = 2$  (Biegeschwingung) und größere  $n$  deren zwei.

#### *Fachsitzung E: Rechenmaschinen*

Vorsitz: N. J. Lehmann (Dresden)

H. SCHECHER, K. SAMELSON, F. L. BAUER (München): *Überlegungen zur Programmierung für eine elektronische Rechenanlage.* (Vorgetr. von H. Schecher.)

Bei der Programmierung umfangreicher numerischer Aufgaben herrscht die Tendenz, zur Arbeitserleichterung und zur Eindämmung von Programmierungsfehlern einen gewissen elementaren Teil der Programmierungsarbeit der Rechenanlage selbst zuzuschieben. Ohne daß man einen Abschluß dieser Entwicklung heute schon sehen könnte, zeichnen sich doch gewisse Zugangswege ab, die diskutiert werden.

R. PILOTY (München): *Die programmgesteuerte elektronische Rechenanlage München.*



